

(0) (1)

Πρόχειρες σημειώσεις
στο μάθημα: Ειδικά θέματα Γεωμετρίας
(ΜΑΕ 822), εαρινό εξάμηνο του
Ακαδημαϊκού έτους 2017-2018 του
Μαθηματικού Τμήματος του
Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Διδάσκων : Γεώργιος Νίκος

Αριθμός εγχειρημάτων φοιτητών : 180

(0) (2)

Εισαγωγή

Σαν εισαγωγή στο αντιμετώπιμο, δηλαδή
περι τίνος πρόκειται συστήνουμε στους
φοιτητές να διαβάσουν τον πρόλογο από
ειδικούς στο θέμα ερευνητές μαθησικής
όπως ο Michael Spivak και ο
Manfred P. Do Carmo στα διάβηκα
πλέον βιβλία τους στα οποία και βασίζουμε
το μάθημά μας τα οποία και παραθέτουμε
ως βιβλιογραφία του μαθήματος.
Εμείς εδώ προσπαθήσαμε να ικανοποιή-
σουμε αυτό το αντίστοιχο υλικό.

Με λίγα λόγια πρόκειται για μια μοντέρνα
θεωρία: τις διαφοριές μορφές με
αρχή γενέσεως ένα πρόβλημα σε υαίνο ο
διαγωνισμός που πρότεινε το 1850 ο
Λόρδος Κέλβιν (προς τιμήν του οποίου και
οι βαθμοί Κέλβιν τω θερμοκρασίας)

(0/3)

Είναι μια θεωρία εγχετημένη με σκοπό να
ενοποιήσει αποτελέσματα στα υδατοβιολογικά
λεχόμενα μαθηματικά.

Η δομή αυτής της θεωρίας έγκειται στο
ότι υπάρχουν πέντε βασικοί ορισμοί που
εξαρτώνται τις διάφορες έννοιες οι οποίες όλη
αποβαφνίζονται πάνω στα πράγματα, με
ενδιάμεσα αποτελέσματα με σχέση έλξης
αποδείξεις έτσι ώστε τα τελικά αποτελέσματα
(τα οποία με τη υδατοβιολογικά μαθηματικά
αποδεικνύονται αρκετά δύσκολα) να αποδεικνύονται
και αυτή σχέση αυτή. Επίσης αυτή η θεωρία
χρειάζεται γνωστά αποτελέσματα σε υ-διαστάσεις
από τις διαστάσεις 2 και 3 που ήταν ήδη
γνωστά στα υδατοβιολογικά μαθηματικά, τα
ενοποιεί στα πλαίσια μιας ειδικής θεωρίας
έτσι ώστε αυτά να συστηθούν σαν φυσικό
επακόλουθο αυτής της θεωρίας όπως και
πολλά άλλα αποτελέσματα βέβαια.

(ο) (4)

Έχει καταβληθεί ιδιαίτερα προσοχή στο σχετικό υλικό να παρουσιαστεί στους φοιτητές όσο γίνεται πιο απλά γραμμικά.

Είναι η δομή των σημειώσεων έχει ως εξής:

Στην αρχή παρουσιάζουμε τα αξιώματα της θεωρίας βωλών που παρουσιάζονται από τον Ζετσελο, (μαθητή του Cantor) το 1908. Σε αυτά προστίθενται 2 ακόμα αξιώματα, το αξίωμα-σχήμα αντίστοιχότητας και το αξίωμα της επιλογής.

Τα αξιώματα της θεωρίας βωλών είναι η βάση πάνω στην οποία θα επεξεργαστούμε τους διάφορους ορισμούς του μεγέθους με αποσκοπώντας τον αριθμό ορισμό των διαφορετικών μορφών στην σελίδα 123 αυτών των σημειώσεων.

Ο θεμελιώδης λήθος πάνω στον οποίο βασίζεται ο ορισμός των διαφορετικών μορφών είναι

(0) (5)

οι τανυστές ή αλλιώς ηλεκτρογραφημένες
απεικονίσεις (ο ορισμός είναι στην σελίδα 27
αυτών των σημειώσεων).

Οι 1 - τανυστές είναι γραμμικές συναρτήσεις
με τιμές στο $\mathbb{R}$ και είναι ήδη γνωστές από την
γραφική διάθεση. Έτσι η πιο απλή περίπτωση
τανυστών που δεν είναι γραμμικές συναρτήσεις
είναι η 2 - τανυστές.

Έτσι αφιερώνουμε κάποιο υπόμνημα στους 2 -
τανυστές στο μέλλον, διότι αν αυτοί γίνουν
καταννοητοί, τότε ο φοιτητής θα έχει αποκτή-
σει μια πρώτη ιδέα για αυτό το κ-τανυστή με
κ=2. Έχουμε και οι αποδείξεις για τις
ιδιότητες των κ-τανυστών για κ=3 είναι
απλά γενίκευση ή εψαθυμότητα εισαγωγής των
αποτελεσμάτων για 2 - τανυστές. Αποφεύγουμε
όπως να αναφερόμαστε σε κ-τανυστές για
κ=3 για δύο λόγους:

1) για πραγματικούς λόγους: διπλάσια ώρα
έλλειψης χρόνου

2) Θα να μην επιβαρύνουμε τον φοιτητή με υπερβολικό σύμβολο με δέκατες πράξεις που μπορεί να προκαλέσει βόλυνση και έλλειψη κατανόησης.

Μετά την απόδειξη των βασικών ιδιοτήτων των 2-τανυστών και του τύπου υπολογισμού τους, ελήφθη ως κριτήριο σωστής και βολής, λόγω έλλειψης χρόνου.

Δίνουμε μόνο τα ενδεχόμενα απαιτούμενα αποτελέσματα και ορίσους με σκοπό να φτάσουμε στο δωδεκάηχο γρήγορα στον ακριβή ορισμό των διαφορικών μορφών στην βελίδα 123. Έτσι πολλά αποτελέσματα (και φυσικά οι αποδείξεις τους) παραλείπονται, πράγμα το οποίο βέβαια είναι κρίμα, όμως ο χρόνος μας αναγκάζει να αφύσουμε πολλά πράγματα ενδιαφέροντα αποτελέσματα με σκοπό ή έστω από ένα διδακτικό πληροφοριολογικό να φτάσουμε στο δυνατό πιο βολικό, αλλά με ακρίβεια στον ορισμό των διαφορικών μορφών.

(6) (67)

Αφού δώσουμε τον ορισμό των διαφοριικών
μορφών στην ολότητα του διανυσματικού
δίνουμε στην παραδείγματα υπολογισμών
διαφορικών μορφών στις απλούστερες
περιπτώσεις στις εφαρμογές που δίνουμε
στις σελίδες 135 και 145.

Έτσι ο φοιτητής μαθαίνει να υπολογίζει
διαφορικές μορφές στις απλούστερες περιπτώσεις
για 0, 1, 2, και 3 μορφές που είναι και οι
σημαντικότερες, (στον χώρο $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$).

Παρουσιάζουμε επίσης τον τύπο υπολογισμού
των n -διαφορικών μορφών στον $\mathbb{R}^n$ για κάθε
 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ στην σελίδα 172 μιας και
ειδικά αυτός έπεται εύκολα από την
θεωρία που αναπτύσσουμε.

Συμπεραίνουμε επίσης ότι υπάρχει μια γενική
τρόπος υπολογισμού των διαφορικών μορφών
κάθε μορφής, δηλαδή n -διαφορικών
μορφών στον $\mathbb{R}^n$ για $1 \leq n \leq \infty$, με
ορίσματα

(ο) (δ)

αλλά έχει μια υάνοια πολυπλοκότητα και
ξεφεύγει από τον βιολόγο μας που είναι για
ηρώτη εισαγωγή στο αντικείμενο.

Τρόπος μελέτης των βημάτων

Υπό αρχήν όλες οι αποδείξεις με υάνοια
έχουν είναι εντός όλης και αυτό βηματίζεται μέσα
στο υέιμενο.

Όπως γράφει και ο Σπινάκι στον πρόλογο του
βιβλίου του οι εμφανιζόμενες έννοιες και οι
αυόλουθόμενες μέθοδοι είναι αρκετά λεπτοφυείς
ώστε η αντιστοιχία αντιμετώπιση τους σε στοιχειώδεις
επιπεδο παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες.

Επειδή λοιπόν από την φύση του το αντικείμενο
έχει έντονα θεωρητικό και αφηρημένο χαρακτήρα
και αρκετή πολυπλοκότητα συστήνουμε τα εξής:

1) Αρχικά διαβάσουμε μόνο τους ορισμούς και
τις επισημάνσεις των διαφόρων αποτελεσμάτων
χωρίς τις αντίστοιχες αποδείξεις. Δεν προση-
θούμε να απομνημονεύσουμε, μόνο να καταλάβουμε
(η απομνημόνευση θα έρθει αργότερα, σε πιο
ωρίμο στάδιο όταν θα έχουμε κατανοήσει όλο
το υέιμενο σε ένα πρώτο στάδιο).

(ο) (9)

Μόλις // αιθανούμε // ότι κατανοούμε έναν
ορισμό φεύγουμε αμέσως παρακάτω (αδιαφύρωντας
παντελώς αν θα τον θυμάστούμε αργότερα, αλλά
μην ανασυχείτε : σίγουρα θα τον θυμάστούμε
αργότερα!). Α, Όχι κατανοούμε έναν ορισμό
εφαρμόζουμε το ερώτημα: Ενώ θα έαν ορισμός
έχει μια αυξημένη γενικότητα και ανφέρεται,
σε δείχνει και αν ούμε που παίρνουν βαν
τιμές από φυσικό αριθμό. Θέτουμε και τη
πρώτη τιμή μόνο π.χ. $k=1,2,3$ και $n=1,2,3$ το
πρώτο και προεπαθούμε να κατανοούμε τον
ορισμό για τέτοιες σταθεροποιημένα μόνο σε περίπτωση
τιμών. π.χ. τον ορισμό του 2-τάξου για
($k=2$ και $n=2$) ή ($k=2$ και $n=3$).

Μόλις // καταλάβουμε // έναν ορισμό για τέτοιες
μικρές τιμές μετά προεπαθούμε να γενικεύσου-
με και να δούμε πως εφαρμόζεται, ο ορισμός
για από k και n . Φυσικά αν κάποιος
καταλάβει από την αρχή έναν ορισμό για
από δείκτη και από παράμετρο που

(0) (10)
υπειδέρχεται σε αυτόν δὲ χρειάζεται
βέβαια να μάθει την προηγούμενη διαδικασία!
Διαβάσουμε τουλάχιστον 2 φορές έτσι
το κείμενο, από την αρχή μέχρι τέλους
όλο, αδιαφορώντας για τις αποδείξεις
(γιατί όπως είχαμε και οι 60 φοιτ. αρχαίοι
υμῶν πρόγονοι: η επανέληψις είναι μύτηρ
πράγματος μαθήσεως!)

2) Μετά διαβάσουμε προσεκτικά τις
εφαρμογές (ασκήσεις τύπων) που βλέπετε
135 και 145 του κειμένου, τουλάχιστον
2 - φορές πάλι.

3) Διαβάσουμε προσεκτικά όλες τις αποδείξεις
που είναι μέσα στην ύλη, τουλάχιστον 2 φορές

4) Προσπαθούμε να λύσουμε τις άλυτες
ασκήσεις που αναφέρονται σε διάφορα
βήματα του κειμένου, (ως άλυτες ασκήσεις).
(Συμπεραίνουμε ότι αυτό το βήμα 4 μπορεί να
γίνει και αριθμῶς μετά το 1 ειδικά)

(01) (12).

5) Διαβάσουμε πάλι μια φορά όλο το υείμενο γραμμένο από την αρχή ως το τέλος με όλες τις αποδείξεις προσοφθώχως τώρα (μόνο σε αυτό το τελευταίο βήμα) να απομνημονεύσουμε τους διάφορους ορισμούς, τύπους και αποδείξεις. Τώρα όμως ελέγξτε για σε ένα πολύ πιο ωριμο βιβλίο από το αρχικό και η απομνημόνευση έχει γίνει για μια εβδόμη υπόθεση!

Προσοχή

Από τα παραπάνω βήματα θα πρέπει με το πρώτο ή μόνο να έχουμε καταλάβει ουσιαστικά το μάθημα, το βήμα 5 είναι στην ουσία η επανάληψη που θα πρέπει να κάνουμε στο μάθημα πριν την τελική εξέταση του μαθήματος! Εννοείται βέβαια ότι ο παραπάνω τρόπος μελέτης είναι απλά μια πρόταση του διδάσκοντα σε κάποιους φοιτητές που για κάποιους λόγους ίσως "χαθούν" μερικές

(ο) (12)

67ον κριτήριο των λεητομερειών του μαθήματος.

Όποιος έχει τον διπλό του ηρωδωπικό τρόπο μελέτης που του βοηθά να το είναι να τον απολαύσει και φυσικά να αθροίσει τα προηγούμενα.

Μερικά πράγματα για τον συμβολισμό:

Όπως είναι γνωστό και φυσικά οι ορίσμοι και συμβολισμοί των διαφόρων εννοιών ανάγονται στην θεωρία συνόλων.

Έτσι τις παραδείγματα αν έχουμε n πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \dots, a_n$, για κάποιον φυσικό αριθμό $n \geq 2$, τότε γράφουμε $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ για το άθροισμα αυτών των αριθμών.

Μολονότι όμως όλοι μας έχουμε τι αριθμός δηλώνει το προηγούμενο άθροισμα, ο ορίσμος του με αριθμούς δεν είναι κατ'όλοκληρον ηροφάνης!!

Για να περιγράψουμε με αριθμούς τι αριθμός εννοούμε όταν γράφουμε το σύμβολο $\sum_{i=1}^n a_i$ θα χρειαζόμασταν να αναφέρουμε

(6) (13)

πολλά αποτελέσματα από θεωρία βωτών.
Και ανάλυση αν έχουμε ένα πεπερασμένο
σύνολο δειγτών A και για κάθε $i \in A$ ορίζεται
ένας πραγματικός αριθμός a_i , τότε όλοι μας συνήθως
τι συμβαίνει το άθροισμα όλων των αριθμών της
μορφής a_i για όλα τα $i \in A$, συμβολίζεται

$\sum_{i \in A} a_i$ αλλά ο ακριβής ορισμός αυτού του

συμβόλου απέχει πολύ από το να δοθεί
επείγουσα.

Σε ένα τυπικό μάθημα θεωρίας βωτών θα
μας έπαιρνε αρκετά μαθήματα για να
περιγράψουμε τι ακριβώς εννοούμε όταν
γράφουμε $\sum_{i \in A} a_i$. Φυσικά δεν έχουμε του

χρόνο για να κάνουμε κάτι τέτοιο στο
μάθημά μας. Οπότε αναγκαστικά επαφιστάμε
στο ότι μαθαίνουμε το σύμβολο $\sum_{i \in A} a_i$ και
 $\sum_{i=1}^n a_i$ διασυντημένα, χωρίς να του δίνουμε

(6) 44)

ακριβή ορισμό.

Εδώ το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να περιγράψουμε τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσει κάποιος για να δώσει τον ακριβή ορισμό του συμβόλου $\sum_{i=1}^n a_i$ και

$\sum_{i \in A} a_i$ για A πεπερασμένο σύνολο και

$a_i \in \mathbb{R}$, για $i=1,2,\dots,n$, όπου $n \in \mathbb{N}$.

Για την περιγραφή των διαφόρων βημάτων που πρέπει να ακολουθήσουμε για να δώσουμε τον ακριβή ορισμό των συμβόλων $\sum_{i=1}^n a_i$ και

$\sum_{i \in A} a_i$ για A πεπερασμένο, θα βασιστούμε

στο εξής βιβλίο:

Γιάννης Ν. Μοσχόβακας, Συμπεράσματα
Ευκλειδιστικής, Ενδόσεις Νεφέλη, Αθήνα 1993.

Στο κεφάλαιο 5 του βιβλίου αυτού δίνονται
τα 5 αξιωματικά ορίσματα των φυσικών αριθμών
και η Ρεαλ έχει προσδιοριστεί βέβαια το

(10) (15)

αξιωμα S της Επαγωγής (Induction Axiom
στην διεύκη βιβλιογραφία)

Στο βιβλίο της S αυτών αξιωμάτων για $\beta\eta$
αξιωμα της θεωρίας $\beta\omega\delta\lambda\omega$, βγαίνει ότι
η αριθμοθεωρία.

Έτσι με αυτά τα αξιώματα και τα αξιώματα
της θεωρίας $\beta\omega\delta\lambda\omega$, αποδεικνύεται η ύπαρξη
για μοναδικότητα (ως προς ισομορφισμό) του
 $\beta\omega\delta\lambda\omega$ N των φυσικών αριθμών και το
θεώρημα αναδρομής.

Με βάση το θεώρημα αναδρομής ορίζεται η
ηράξη της πρόσθεσης και τον πολλαπλασιασμό
φυσικών αριθμών και αποδεικνύονται οι διάφορες
ιδιότητες τους όπως η προεταίριση και
η αντιμεταθετικότητα.

Μετά με βάση την πρόσθεση των φυσικών
αριθμών ορίζεται η σχέση της διάταξης $\leq$
των φυσικών αριθμών, και αποδεικνύεται ότι
η διάταξη στους φυσικούς αριθμούς είναι
μια διάταξη (παράδειγμα έδω τον ορισμό
της μιας διάταξης).

(16)

Με βάση τον ορισμό της διάνυσμα
των φυσικών αριθμών δίνεται ο ορισμός του
πληθυσμού διατεταγμένου $[n, m]$ των φυσικών
αριθμών n, m , όπου $n \leq m$ ως εξής:

$[n, m] = \{i \in \mathbb{N} \mid n \leq i \text{ και } i \leq m\}$ το οποίο
ορίζεται βάσει α ιεράς από το α/ω/α της
εξειδίκευσης.

Παρόμοια αν $n \in \mathbb{N}$, τότε ορίζεται το
πλειστό διάνυσμα: $[1, n]$ για $n \geq 1$ ως εξής:

$$[1, n] := \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \text{ και } i \leq n\}.$$

Μετά από τον προηγούμενο συμβολισμό ορίζεται
πλέον αυστηρά το σύνολο $T_n = \{1, \dots, n\}$ που
γράφουμε για απλότητα αν $T_n := \{1, \dots, n\} = [1, n]$.

Στην περίπτωση 1ο των απλών δίνουμε τον
αυτομό ορισμό της έννοιας της σωστήτητας.

Έστω τώρα X, Y να είναι δύο σύνολα και

$f: X \rightarrow Y$ να είναι μια οποιαδήποτε σωστή

(ο) (17)

Η f ονομάζεται επλήρης εάν για κάθε $y \in \Psi$ υπάρχει κάποιο $x \in X$ ώστε να ισχύει:
 $y = f(x)$.

Η f ονομάζεται 1-1 εάν ισχύει το εξής:

Αν $x_1, x_2 \in X$ και ισχύει: $f(x_1) = f(x_2)$ τότε να ισχύει $x_1 = x_2$.

Με βάση την έννοια της 1-1 και επί συνάρτησης ορίζεται η έννοια της ισοτιθέμενότητας μεταξύ συνόλων.

Έστω X και Ψ να είναι δύο τυχαία σύνολα.

Τα X και Ψ λέγονται ισοτιθέμενα εάν υπάρχει μια συνάρτηση $f: X \rightarrow \Psi$ η οποία είναι 1-1 και επί.

Προφανώς αν η $f: X \rightarrow \Psi$ είναι 1-1 και επί τότε ορίζεται μια μοναδική συνάρτηση που την συμβολίζουμε με f^{-1} όπου:

$f^{-1}: \Psi \rightarrow X$ και την καλούμε αντίστροφη

της X ως $f^{-1}(y)$ (18)

Σχόλιο ότι: $x = f^{-1}(y)$ για κάποιο $x \in X$ και $y \in \Psi$

μόνο εάν ισχύει ότι: $y = f(x)$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν η f είναι 1-1 και επί τότε ο αντίστροφος ορίζεται καλά η f^{-1} με τον παραπάνω τρόπο και είναι μοναδική και ότι και η f^{-1} είναι 1-1 και επί και ισχύει ότι:

$f \circ f^{-1}: \Psi \rightarrow \Psi$ με $f \circ f^{-1} = \text{id}_{\Psi}$ και

$f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$ με $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$, όπου

$\text{id}_X: X \rightarrow X$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση στο X με $\text{id}_X(x) = x$ για κάθε $x \in X$ και

$\text{id}_{\Psi}: \Psi \rightarrow \Psi$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση στο Ψ με $\text{id}_{\Psi}(y) = y$ για κάθε $y \in \Psi$ και ο id_X και

id_{Ψ} είναι και οι δύο συναρτήσεις 1-1 και επί. Αν τα X και Ψ είναι ισονumerικά τότε

γράφουμε: $X \cong \Psi$ και από τη παραπάνω τότε

(ο) (19)

ένεται και ότι: $\Psi \subseteq X$.

Μετά από όλα τα προηγούμενα είχαμε ήδη
τώρα είναι να δώσουμε τον αυστηρό ορισμό
του πεπερασμένου συνόλου.

Το σύνολο A λήγόν είναι πεπερασμένο αν
υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε το
 A να είναι ισοτιμικό με το σύνολο $\{0, 1, \dots, n\}$
να συμβολιστεί εάν $A \approx \{0, 1, \dots, n\}$ να λέγεται
απειρο σύνολο εάν δεν είναι πεπερασμένο, να
αριθμώμενο (ή αναριθμώμενο) αν είναι είτε πεπερασμένο
είτε ισοτιμικό με το $\mathbb{N}$.

Με βάση την έννοια του πεπερασμένου συνόλου
διατυπώνεται και αποδεικνύεται η αρχή του

Περίστροφου ή οποία είναι η βάση του
υπόδοσης των μαθηματικών που λέγεται βασισμένη.

Αρχή του Περίστροφου: Υπάρχει συνάρτηση

$1-1$, $f: A \rightarrow A$ από ένα πεπερασμένο

σύνολο A στον εαυτό του είναι και επί

(συμβολιστικά $f(A) = A$).

(10) (20)

Με βάση την αρχή του Περιστερώνα
αποδεικνύεται το ερώτημα:

Για κάθε πεπερασμένο σύνολο A , υπάρχει ακριβώς
ένας φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$A \cong [0, n]. \text{ Ο μοναδικός αυτός αριθμός}$$

καλείται πηχός των στοιχείων του πεπερασμένου
συνόλου A και συμβολίζεται ως $\#(A)$.

Μόνο τώρα έχει οριστεί αυστηρά πηχός n
έννοια του πηχούς των στοιχείων ενός
πεπερασμένου συνόλου.

Στο παραρτήμα του βιβλίου δίνεται η τεχνική
κατασκευής των πραγματικών αριθμών από τους φυσικούς,
και τους ρητούς αριθμούς. Συμβολίζουμε με

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ τα σύνολα των φυσικών, ρητών και
πραγματικών αριθμών.

Έστω τώρα $T_n = \{1, 2, \dots, n\} = [1, n]$ το

πεπερασμένο σύνολο που ορίστηκε προηγουμένως
για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $a: T_n \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μία τοχούβα
συνάρτηση.

Θα συμβολίζουμε με $a(i) = a_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ για απλότητα.

Με βάση τον ορισμό της πράξης της πρόσθεσης στο $\mathbb{N}$ ορίζεται τώρα αυστηρά το σύμβολο

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \omega \in \mathbb{N}:$$

Για $n = 2$ ορίζουμε:

$$\sum_{i=1}^2 a_i := +((a(1), a(2))) =$$

$$= +((a_1, a_2)) = a_1 + a_2$$

Α, υποθέτουμε ότι έχει οριστεί το σύμβολο $\sum_{i=1}^n a_i$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ με

$n \geq 2$. Τότε ορίζουμε το σύμβολο

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i := +\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i, a_{n+1}\right)\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) + a_{n+1}. \quad \text{Έτσι επαγωγικά}$$

(6) (22)
ορίζεται τώρα αυστηρά το σύνολο

$$\sum_{i=1}^n a_i \text{ για } n \in \mathbb{N} \text{ με } n \geq 2.$$

Έστω τώρα A να είναι ένα πεπερασμένο
σύνολο το οποίο και $a: A \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μια
τοχούσα συνάρτηση. Έτσι για κάθε
 $i \in A$ ορίζεται ο μοναδικός αριθμός $a(i) = a_i$
που ανήκει στο $\mathbb{R}$.

Θα ορίσουμε τώρα αυστηρά το σύνολο

$$\sum_{i \in A} a_i \text{ δηλαδή πιο περιγραφή το άθροισμα}$$

όλων των αριθμών της μορφής a_i για $i \in A$ όταν
τα a_i λαμβάνουμε σε αυτό το άθροισμα μια
αριθμική φορά τον κάθε ένα.

Αφού το A είναι πεπερασμένο υπάρχει
μια συνάρτηση $j: T_n \rightarrow A$ η οποία

είναι 1-1 και επί όπου $n = \#(A)$.

(Εμφανούμε ότι υπάρχουν $n!$ τέτοιες διαφορετικές
συνάρτησεις εάν την j), όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Επίσης ορίζεται γ ⁽⁶⁾ ⁽²³⁾ ως συνάρτηση

$a \circ j \rightarrow \sum_{i=1}^n T_i \rightarrow B$ και άρα ορίζεται το άθροισμα $\sum_{i=1}^n (a \circ j)_i$ με τον αριθμό ενός

συμβολισμού. Έδωσαν επίσης ότι αν $j_1: T_1 \rightarrow A$ και $j_2: T_2 \rightarrow A$ είναι δύο συναρτήσεις 1-1 και επί με $j_1 \neq j_2$, τότε ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^n (a \circ j_1)_i = \sum_{i=1}^n (a \circ j_2)_i, \text{ δηλαδή αυτός}$$

το άθροισμα δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη συνάρτηση j_1 ή j_2 (αποσυνδέονται από την η! τέτοιες συναρτήσεις) με το οποίο το ορίζουμε. Αυτό αριθμώ το άθροισμα είναι αυτό που θα φουφούσα αν $\sum_{i \in A} a_i = \sum_{i=1}^n (a \circ j)_i$

για κάθε $j: T_n \rightarrow A$ όπου n j είναι 1-1 και επί και $n = \#(A)$.

Μετά ο τώρα έχω δοθεί οι αριθμοί $\sum_{i=1}^n$ ορισμοί των παραπάνω συμβόλων του άθροισμα $\sum_{i=1}^n a_i$ και $\sum_{i \in A} a_i$ και αυτό είναι αυτό που θα

(6) (24)
πρέπει να έχουμε μια νόρμα σε όλο το μάθημα.
Συμειώνουμε τέτοιες ότι αυτές είναι οι
πρώτες σημειώσεις του μαθήματος και αφορούν
την ύλη που έχει διδαχθεί μέχρι το
Παράρτημα του 2018.

Θα ακολουθήσω μια άλλη σημείωση τις
οποίες θα φροντίσουμε να παραδώσουμε
έξυπνα στους φοιτητές έτσι ώστε να
προετοιμαστούν ομαλά για το μάθημα.
Στο ενόψει σε σημειώσεων θα

υπάρχουν και κάποιες άλλες αβιβάσεις,
υπολογιστικές και οποίες θα δίδεται μόνο
το αποτέλεσμα στο τέλος.

Οι αβιβάσεις αυτές θα είναι ενδεικτικές
για τις αβιβάσεις που θα μπου στην εξέταση.
Ενδεικτικές αβιβάσεις για τις εξέτασεις είναι
και οι αβιβάσεις που δίνονται λειτουργικώς
στην βελδία 135 και 145 αυτών των
σημειώσεων. Επίσης θα δοθεί και ένα
παράρτημα (στο ενόψει σε σημειώσεων) με
τα βιογραφικά από τον ιστορικό των αβιβάσεων
πολλών μεταβλητών (απεριόριστος III) που
θα χρειαστώ στο μάθημα μας. και (IV)

Βιβλιογραφία (0) (25)

1) Μανφρεδο Ρ. ντο Σαζμο

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Θεωρία και Εφαρμογές

Εκδόσεις leaderbooks (L.B)

Αθήνα 2010

Σειρά: Πανεπιστημιακή Μαθηματική Βιβλιοθήκη

2) Michael Spivak

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΕ ΠΟΛΥΠΛΟΤΗΤΕΣ,

Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Αρδύλειο 2010

Επίσης συστήνεται το βιβλίο Θεωρίας βωδών που αναφέρθηκε προηγουμένως.

Συμπεραίνεται ότι από τα παραπάνω 2

βιβλία το πρώτο συστήνεται στον οδηγό

βιβλίων σαν ενδεικτικό βιβλιογραφία για το

μάθημα και το δεύτερο σαν ενδεικτικό

βιβλιογραφία για το μάθημα Απειροστικού Νοχισμού

III (Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών,

Διαφορίσιμες και ολοκληρωτικές Νοχισμούς) και

IV.

①

Διαφορινές μορφές

Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

Θα αναφέρουμε εδώ τα στοιχεία από την θεωρία συνόλων που είναι αναγκαία στο μάθημά μας.

Αυτό θα γίνει για να θεωρηθούμε την ορολογία και τους συμβολισμούς που θα αναφέρουμε σε αυτό το μάθημα οι οποίοι έχω μετράει εύκολα.

Αυτό γίνεται γιατί είναι πολύ εύκολο να χαθεί ο φοιτητής μέσα στον μνησώνα των αναγκαιότητων εννοιών αυτού του μαθήματος, αν δεν χωρίσει τι εννοούσε αναπαράγει βιολύμπι.

Είναι γνωστό ότι στη θεωρία συνόλων θεωρούμε κάποιες έννοιες σαν πρωταρχικές. Δηλαδή δεν τους δίνουμε ορισμό, αλλά αναμένουμε να γίνουν κατανοητές από την αίσθηση και την εμπειρία που έχει ο μαθητής.

Έτσι πρωταρχικές θεωρούνται οι έννοιες σύνολο, στοιχείο ενός συνόλου, η έννοια ότι

(2)

Ενα συμπεριφερόμενο στοιχείο ανήκει σε ένα
συμπεριφερόμενο σύνολο, η έννοια ότι δύο

αντιτίθενται της πληθώρας μας είναι 169 κ.τ.λ.

Ετσι η έννοια του συνόλου δίνεται διαδοχικά υπό
της μορφής συμπεριφερόμενων παραδειγμάτων μόνο.

Για παράδειγμα ένα σύνολο είναι το σύνολο των
φοιτητών που παρακολουθούν ένα συμπεριφερόμενο

μάθημα, μια συμπεριφερόμενη χρονική στιγμή στο

μαθηματικό Ιωαννίνων. Έχει την ιδιότητα

αυτό το σύνολο να είναι πλήρως καθορισμένο, με

την έννοια ότι ένας παρατηρητής μπορεί να μας

περιγράψει τα στοιχεία του και να αναζητήσει

εάν ένα τυχόν αντιτίθεντο που θα του αναφερόμε

ανήκει ή όχι σε αυτό το σύνολο.

Την ιδιότητα του πλήρως καθορισμένου έχω

και τα στοιχεία του συνόλου και το ίδιο το σύνολο.

Σε αντιδιαστολή μπορούμε να πούμε: το σύνολο των

τροφών που βλάπτουν ένα συμπεριφερόμενο άνθρωπο, δεν

είναι σύνολο γιατί το σύνολο δεν είναι πλήρως καθορισμένο.

③

Επίσης χρησιμοποιούμε ορισμένες βωθήνες και τελεστές.

Διαθέτουμε, για n -μελή βωθήνη P , για κάποιο φυσικό αριθμό n , είναι οριστική αν για κάθε n -άδα αντιστοιχέντων $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι καθορισμένο χωρίς αμφισβήτηση αν η $P(x)$ αληθεύει ή όχι. Παραδείγματα, χωρίς, οι διμελείς βωθήνες:

$$P(x, y) \stackrel{\text{or}}{\iff} x \text{ είναι γονιός του } y,$$

$$S(s, t) \stackrel{\text{or}}{\iff} \text{οι } s \text{ και } t \text{ είναι αδελφοί}$$

$$\iff (\exists x) [P(x, s) \text{ και } P(x, t)]$$

είναι ορισμένες, αν δεχτούμε (ηα το παράδειγμα) ότι οι νόμοι της βιολογίας καθορίζουν ανεξαρτητά χωρίς αμφισβήτηση.

Υπάρχει αναλογία, ένας τελεστής ή μεταβλητών

F είναι οριστικός αν αντιστοιχίζει σε κάθε

n -άδα αντιστοιχέντων x ένα βωμενιμένο και αναμφισβήτητο καθορισμένο αντιστοιχέντο $w = F(x)$.

(4)

Για παράδειγμα ο τελεστής

$$F(x) \stackrel{\text{op}}{=} \begin{cases} 0 & \text{πατέρας του } x, \text{ αν } x \text{ είναι άνθρωπος} \\ x, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

είναι ορισμένος.

Δεν απαιτούμε από μια ορισμένη σωθική ή ενα-
τεστή να είναι αποκρίσεις, δηλαδή να έχουμε μια
ιατα συνεκτική μέθοδο υπολογισμού της αληθοτιμής
τους.

Η αξιωματική βάση της θεωριοθεωρίας

Δεχόμαστε ελάχιστα ότι υπάρχει ένα πεδίο ή
υπόστος αντικείμενων W , περιεκτικό από το οποίο είναι
σύνολα και κάποιοι ορισμένες σωθικές και
τελεστές στο W , ανάμεσα τους και οι βασικές
σωθικές:

$x = y \Leftrightarrow$ το αντικείμενο x είναι ίδιο με το y .

$\text{Set}(x) \Leftrightarrow$ το x είναι σύνολο,

$x \in y \Leftrightarrow \text{Set}(y)$ και το x ανήκει στο y .

Τα αντικείμενα που δεν είναι σύνολα τα
λέμε άτομα και αφήσαμε ανοιχτό το αν

υπάρχω ατόμα, δηλαδή ⁽⁵⁾ ήνορ εί όλα τα
αντιμετώπια να είναι δυνατό.

Τα αξιώματα της γνωσθεωρίας είναι 9.
Καθορίζω τρόπους παραγωγής νέων γνώσεων από
ήδη υπάρχοντα κριθώς και κληοίες σχέσεις μεταξύ
γνώσεων.

Αυτά είναι γενικά αξιώματα και εφαρμόζονται
σε κριθε μαθηματικούς κλάδους. Αλλά υπάρχουν και
μαθηματικές θεωρίες που έχουν τα δικά τους
αξιώματα, όπως η ευκλείδεια γεωμετρία, που
ήταν το πρότυπο μαθηματικής θεωρίας τη αιώνες.

Η ιδιότητα του να είναι ένα αντικείμενο
δύνατο, δεν είναι πάντα προφανής και ούτε
πάντα αληθινή. Πολλές φορές χρειάζεται κληοίο
αξίωμα της θεωρίας γνώσεων για να βεβαιώσουμε
οτι ένα αντικείμενο είναι πράγματι δυνατό.

Αυτό θα κάνουμε και εμείς στο μαθημά μας.
Πριν βεβαιώσουμε την παραγωγή των αξιώματων της
γνωσθεωρίας, αναφέρουμε την βασική έννοια
του υπογνώστου ενός γνώστου.

⑥
Αν τα A και B είναι σύνολα θα λέμε ότι,
το A είναι υποσύνολο του B και θα το συμβολίζουμε
με $A \subseteq B$ εάν κάθε στοιχείο του A ανήκει στο B .

Αξιώματα της θεωρίας συνόλων

(I) Αξίωμα Εισαγωγής

Δύο σύνολα x και y είναι ίσα (συμβολικά $x=y$)
μόνο εάν έχουν τα ίδια στοιχεία.

(II) Αξίωμα του κενού συνόλου

Υπάρχει ένα σύνολο το οποίο δεν έχει κανένα
στοιχείο και το συμβολίζουμε με $\emptyset$.

(III) Αξίωμα ή διατεταγμένου ζεύγους

Για κάθε δύο ^{αντικείμενα} x και y υπάρχει ένα
σύνολο z με μόνα στοιχεία τα x και y .

Τότε $z = \{x, y\}$ και εάν $x=y$, συμβολίζουμε

$z = \{x\}$. Από το αξίωμα της εισαγωγής το z είναι
το μοναδικό σύνολο με μόνα στοιχεία τα x και y .

(IV) Αξίωμα ένωσης

Για κάθε σύνολο x υπάρχει ένα σύνολο Y με μέλη στοιχεία όλα τα στοιχεία των στοιχείων του x .

Από το αξίωμα της ενοποίησης αυτό το σύνολο είναι μοναδικό και το συμβολίζουμε με $Y = Ux$.

(V) Αξίωμα εξειδίκευσης ή διαχωρισμού

Για κάθε σύνολο A και κάθε μονομελή, οριστική συνθήκη P , υπάρχει ένα σύνολο B που ικανοποιεί την ισότητα:

$$x \in B \Leftrightarrow [x \in A \text{ και ισχύει η } P(x) \text{ για το } x]$$

VI Αξίωμα διασποράς

Για κάθε σύνολο x υπάρχει ένα σύνολο Y που έχει ως στοιχεία του ακριβώς όλα τα υποσύνολα του x . Από το αξίωμα της ενοποίησης αυτό το σύνολο είναι μοναδικό.

VII Αξίωμα του αείρου

Υπάρχει σύνολο I που περιέχει το $\emptyset$ και το μονοσύνολο κάθε μέλους του. Δηλαδή $\emptyset \in I$ και

⑧

αν $x \in I$ τότε και το $\{x\} \in I$.

VIII Αξιωματική αρχή

Θεωρούμε μια ορισμένη συνάρτηση $Q(x, y)$ δύο μεταβλητών. $\nexists Q(x, y)$ να ορίζεται, επαρκώς, συνάρτηση αν ικανοποιεί το ελγ:

Αν x και y είναι αντίθετοι (ή μπορεί να είναι όμοιοι ή όχι) και αληθεύει η $Q(x, y)$ για τα x, y τότε αν υπάρχει z αντίθετος για το οποίο αληθεύει η $Q(x, z)$ τότε $y = z$.

Διαισθητικά υπάρχει μοναδικός y αντίθετος ώστε να αληθεύει η $Q(x, y)$ για καθένα x δοθέν.

Το αξίωμα αυτό λέει το ελγ:

Εστω Z να είναι ένα σύνολο. Για κάθε

$x \in Z$ θεωρούμε το μοναδικό y (αν υπάρχει) για το οποίο αληθεύει η $Q(x, y)$. Τότε όλα τα

y που παίρνουμε με τον παραπάνω τρόπο ορίζουν ένα το σύνολο $\{y : x \in Z \text{ και ισχύει } Q(x, y)\}$

(9)

Τώρα ορίσουμε το τελευταίο αβλ/μα της θεωρίας
 συνόλων, το αβλ/μα των ζευγών, θα χρειαστεί να
 ορίσουμε υπόλοιπες έννοιες.

Έστω x, y να είναι δύο αντικείμενα,

Ορίζουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y) ή τμήμα
 στοιχείο το x και δεύτερο το y το σύνολο:

$$(x, y) := \{ \{x\}, \{x, y\} \}.$$

Αν $x=y$, ορίζουμε $(x, x) := \{ \{x\} \}$.

Παίρνει ότι, αν x_1, y_1, x_2, y_2 είναι αντικείμενα,
 τότε: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$.

Έστω A, B να είναι δύο σύνολα.

Ορίζουμε την οριζόντιωτή συνθήκη:

$\text{OrdPair}_{A,B}(z) \stackrel{\text{op}}{\Leftrightarrow} \text{υπάρχει } x \in A \text{ και υπάρχει } y \in B$

ώστε: $z = (x, y)$.

Ορίζουμε τώρα ότι τα A, B το κατεβίωμα
 του ζεύγους θα το σύνολο:

$$A \times B := \left\{ z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid \text{OrdPair}_{A,B}(z) \text{ αληθές} \right\}$$

(20)

Από το άνωματι γν, έστω το $A \cup B$ είναι σύνολο και
από το άνωματι γν δυνάμει σύνολο, το οποίο εφαρμόζεται
δύο φορές, το $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ είναι σύνολο. Τώρα από
το άνωματι είδειξέτω ότι το $A \times B$ είναι
πρώτη σύνολο από το ορίσμο γν.

Έστω A, B να είναι δύο σύνολα τώρα.

Εναι γν $C \subseteq A \times B$ ονομάζεται διμελής σχέση.

Μια διμελής σχέση $f \subseteq A \times B$ ονομάζεται
συνάρτηση (ή απεικόνιση) αν ικανοποιεί τις
εξής δύο συνθήκες:

i) για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in B$: $(x, y) \in f$

ii) Αν $(x, y), (x, z) \in f$, τότε $y = z$.

Μια συνάρτηση $f \subseteq A \times B$ συμβολίζεται ως

$f: A \rightarrow B$. (Μα όταν το γράφουμε θα εννοήσουμε συνάρτηση από το A στο B)

Για κάθε $x \in A$, το μοναδικό $y \in B$ (από το

ii) για το οποίο ισχύει: $(x, y) \in f$ συμβολίζεται

ως $f(x)$. Άρα $y = f(x)$.

(11)

Έστω A, B να είναι δύο σύνολα. Το σύνολο

$$\{f \subseteq A \times B \mid f: A \rightarrow B\} = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid f: A \rightarrow B\}$$

είναι σύνολο από το σύνολο όλων των υποσυνόλων της $A \times B$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B και θα το συμβολίζουμε με:

$$(f: A \rightarrow B) = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid f: A \rightarrow B \text{ συνάρτηση}\}$$

Χρησιμοποιώντας ... διατεταγμένα τριπλάσια,

ορίζουμε μια τριπλή αντιστοιχία x, y, z , των

τριπλών $(x, y, z) = (x, (y, z))$ και για

τρία σύνολα A, B, Γ , ορίζουμε:

$$A \times B \times \Gamma = A \times (B \times \Gamma)$$

Επαφαισμού αν έχουμε ορίσει την n -άδα

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ για n -αντιστοιχία, ορίζουμε

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = ((x_1, x_2, \dots, x_n), x_{n+1}) \text{ και}$$

για n -σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$ έχουμε ορίσει το

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, τότε για το $n+1$ σύνολο

$A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$, ορίζουμε:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n+1} = A_1 \times (A_2 \times \dots \times A_{n+1})$$

(12)

Έστω I να είναι ένα σύνολο και διασφ/δε
 $i \in I$, ορίζεται $\rightarrow$ ένα σύνολο A_i κατὰ γινόμενόν i .

Από το αξίωμα εκχώρησης αντιστοιχίζοντας ορίζεται το
σύνολο $B := \{ A_i \mid i \in I \}$. Το B αποτελείται από στοιχεία $A_i, i \in I$

Από το αξίωμα της ένωσης ορίζεται το σύνολο

$$\Gamma = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

από το οποίο $A_i \subseteq \Gamma, i \in I$

Από το αξίωμα της επέκτασης ορίζεται τώρα το
σύνολο

$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ f \in (g: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i) \mid \forall i \in I, f(i) \in A_i \right\},$$

το οποίο αποτελείται από στοιχεία f που ανήκουν

A_i , για $i \in I$, το οποίο είναι πράγματι ένα σύνολο
όπως είδαμε προηγουμένως.

Μετά την παραπάνω οριστική διασφ/δεσμοί να
ορίσουμε το τελευταίο αξίωμα της θεωρίας μας το
περί της αξίωμα της επέκτασης.

Άσκηση IX

Άσκηση της Ενότητας

Έστω I να είναι ένα σύνολο και για κάθε $i \in I$ έστω ότι υπάρχει το σύνολο A_i .

Από το άνωμα σχήμα απογοητευτικά ορίζεται η αλυσή το σύνολο $B := \{ A_i \mid i \in I \}$.

Αι ισχύει ότι $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$, τότε ισχύει ότι:

$$\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset.$$

Διότι με βάση το μαθηματικό συμπέρασμα για αποδοτικότητα ορισμένων, η ένωση συνόλων είναι η ένωση συνόλων.

Παρατήρηση 1. Για να διατυπωθεί το άνωμα της Ενότητας χρησιμοποιήθηκε. ότι η άνωμα της Ενότητας είναι από αυτό τον αριθμό.

Παρατήρηση 2

Το άνωμα του αριθμού δεν το χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως.

(14)

Είναι απαραίτητο όµως για την κατασκευή των, φυσικών, αριθµών, ρητών και πραγµατικών αριθµών. Επειδή τα σύνολα αυτά $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ θα τα θεωρούµε γνωστά από τα µαθηµατικά και δεν θα τα κατασκευάσουµε. Επίσης θα θεωρούµε γνωστές και τις ιδιότητες αυτών των συνόλων.

Έστω X, Y, Z να είναι τρία σύνολα και

$f: X \times Y \rightarrow Z$ να είναι μία συνάρτηση. Τότε

η f ορίζεται και πάλι στο Z .

Θα χρησιµοποιήσουµε συσπαστικά τα αξιώµατα της θεωρίας συνόλων για την κατασκευή των διαφόρων συνόλων αυτού του µαθηµατός, και ιδιαίτερα για να δώσουµε τον αυστηρό ορισµό των διαφοριών µορφών.

Κεφάλαιο 1

Έστω V να είναι ένα σύνολο. Θεωρούμε δύο
 πράξεις $+$: $V \times V \rightarrow V$ που να υποδηλώνει πρόσθεση
 και $\cdot$: $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ που να υποδηλώνει πολλαπλασιασμό
 πολλαπλασιασμού.

Α, $(u, w) \in V \times V$, θα συμβολίζουμε με

$+(u, w) = u + w$ και θα το υποδηλώνουμε πρόσθεση

και $\cdot ((\lambda, u)) = \lambda \cdot u$ και θα το υποδηλώνουμε
 πολλαπλασιασμό του u , για $u, w \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έχει οριστεί η τριπλότητα $(V, +, \cdot)$.

Η τριπλότητα $(V, +, \cdot)$ θα υποδηλώνεται διανυσματικό
 χώρο αν ικανοποιούνται τα εξής:

1) Η δομή $(V, +)$ είναι αβελιανή ομάδα διηρημένη
 ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

i) $u + w = w + u$, για κάθε $u, w \in V$ (αντιμεταθετικότητα)

ii) $(u + w) + v = u + (w + v)$, για κάθε $u, w, v \in V$ (προσεταιριστικότητα)

iii) υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in V$: $0 + u = u + 0 = u$, για κάθε $u \in V$.

iv) για κάθε $u \in V$, υπάρχει ένα διάνυσμα που το

συμβολίζουμε με $-u \in V$: $u + (-u) = (-u) + u = 0$

16

Γράψω ταχύτατα τις εξισώσεις:

v) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$, για κάθε $u, v \in V$

vi) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, για κάθε $u \in V$

vii) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u) =$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \forall u \in V$

viii) $1 \cdot u = u$ για κάθε $u \in V$, όπου $1 \in \mathbb{F}$

Η τριάδα $(V, +, \cdot)$ λέγεται για διανυσματικός χώρος ανάλογα στο $\mathbb{F}$.

Έστω $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ να είναι μια n -άδα από διανυσματικούς του V . Ονομάζουμε γραμμικό συνδυασμό της n -άδας $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ κάθε διάνυσμα της μορφής:

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \in V$, όπου $\lambda_i \in \mathbb{F}$, για $i=1, 2, \dots, n$
για κάποιον $n \in \mathbb{N}$.

Η n -άδα διανυσματικών $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ του V , όπου $u_i \in V$, για κάθε $i=1, 2, \dots, n$, για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο εάν η

ισότητα $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$ (όπου 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα του V) ισχύει μόνο εάν $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

(17)

Ένα υποδύναμο $E \subseteq V$ ονομάζεται *εξωτερικά γεννητόρως* του V αν υπάρχει διάνυσμα του V γραφεται, εαν γραμμικώς συνδυασμός ενός ανεξαρτήτου πλ.θου, από διανύσματα του E .

Ένα υποδύναμο E του V , ονομάζεται *γραμμικά ανεξάρτητο*, εαν υπάρχει ανεξάρτητο υποδύναμο διανυσμάτων του E είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Το E είναι μια βάση του V αν είναι *εξωτερικά* γραμμικά ανεξάρτητο και *εξωτερικά γεννητόρως* του V .
Χρησιμοποιώντας το *ισοδύναμο* με το *αίτιον* της *επιλογής* λέγεται του $Zorn$ αποδεικνύεται ότι:
Θεώρημα

Υπάρχει διανυσματικός χώρος έχει μια βάση.

Αν μια βάση του V έχει ανεξάρτητο πλ.θου στοιχείων $\circ$ V ονομάζεται *φινεραστήτως* διάστατος. Αν αυτό δεν έχει τότε ο V ονομάζεται *άπειρος* διάστατος.

Έστω ένα χώρο ανεξάρτητου *διάστατος* υπάρχει βάση έχει το ίδιο πλ.θου στοιχείων που ονομάζεται *διάστατος* του χώρου.

(18)

Οι παραπάνω είναι υφνοίτες βασικές έννοιες για
διανυσματικούς χώρους. Από εδώ και έπειτα θα
θεωρούμε πως θα αναπτύσσονται τις εφαρμογές
αυτές.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n$

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ θα τα συμβολίζουμε με
 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για $i=1, 2, \dots, n$.

Στο $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε τις συνθετικές πράξεις

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ και } \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ όπου}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\text{και } \lambda (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \text{ για κάθε}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R} \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος.

$$\text{Θεωρούμε } e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-θέση}}, 0, \dots, 0) \text{ } i\text{-θέση όπου}$$

το e_i έχει στην i -θέση το 1 και παντού αλλού 0
Τότε η n -άδα $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ είναι μια βάση του
 $\mathbb{R}^n$.

(19)

Έστω $(V_1, +, \cdot)$ και $(V_2, \oplus, \odot)$ να είναι
δύο διανυσματικοί χώροι.

Μια συνάρτηση $f: V_1 \rightarrow V_2$ ονομάζεται γραμμική
αν ισχύουν τα εξής:

1) $f(u+v) = f(u) \oplus f(v)$ για κάθε $u, v \in V_1$

και

2) $f(\lambda \cdot u) = \lambda \odot f(u)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και
κάθε $u \in V_1$.

Παρατηρήσεις: Οι πράξεις $+$ και $\oplus$ είναι δύο
διαφορετικές συναρτήσεις αφού έχουν διαφορετικές
πεδία ορισμού γενικά. Πολλές φορές όμως, χρησιμοποιούμε
αναγραμματισμένα το σύμβολο $+$ αντί για την πράξη $\oplus$ επειδή
από το σύμφραγμένο (δηλαδή το βέ. που βγαίνει)
εφαρμόζεται καθε φορά η συγκεκριμένη πράξη) είναι
προφανές το εάν πράσσεται για την πράξη $+$ ή την $\oplus$.
Η ίδια παρατήρηση ισχύει για τις πράξεις $\cdot$ και
 $\odot$. Αυτή η παρατήρηση θα εφαρμόζεται παρόμοια
και σε άλλα σύμβολα που θα χρησιμοποιούσαμε βέ
αυτά το φάσμα και αντί τέτοιο θα τονίζαμε βέ
κάθε σύμβολο που χρησιμοποιούσαμε τον αντίστοιχο σύμβολο.

(20)

Έστω $f_1: V_1 \rightarrow V_2$ και $f_2: V_1 \rightarrow V_2$ να είναι, δύο γραμμικές συναρτήσεις.

Με βάση τις f_1, f_2 ορίζουμε μία νέα συνάρτηση που θα την συμβολίζουμε με $f_1 + f_2$ ως εξής:

$$f_1 + f_2: V_1 \rightarrow V_2 \text{ δόσου:}$$

$$(f_1 + f_2)(u) = f_1(u) + f_2(u) \text{ για κάθε } u \in V_1.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η $f_1 + f_2$ είναι γραμμική συνάρτηση (αφαιρείται σαν αδειάση).

Επί ορίζεται μία πράξη $+$ που θα την λέμε πρόσθεση ως εξής:

Θεωρούμε και αρχικά το σύνολο:

$$\mathcal{L}(V_1, V_2) := \{g \in (f: V_1 \rightarrow V_2) \mid \text{η } g \text{ είναι γραμμική}\}$$

των γραμμικών συναρτήσεων από το V_1 στο V_2 και σε αυτό ορίζουμε την πρόσθεση:

$$+: \mathcal{L}(V_1, V_2) \times \mathcal{L}(V_1, V_2) \rightarrow \mathcal{L}(V_1, V_2),$$

δόνου:

$$+((f, g)) := f + g \text{ για κάθε } (f, g) \in \mathcal{L}(V_1, V_2)^2,$$

$$\text{δόνου ως συνήθως: } \mathcal{L}(V_1, V_2)^2 = \mathcal{L}(V_1, V_2) \times \mathcal{L}(V_1, V_2).$$

(21)

Επίσης έδω $f \in \mathcal{F}(V_1, V_2)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ορίζουμε για νέα συνάρτηση που συμβολίζουμε με λf ως εξής: $\lambda f: V_1 \rightarrow V_2$, με νόμο:

$$(\lambda f)(u) = \lambda \cdot f(u) \text{ για κάθε } u \in V_1.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in \mathcal{F}(V_1, V_2)$ η λf είναι γραμμική (αφύνητα, βλ. άσκηση).

Έτσι ορίζεται για συνάρτηση:

$$\cdot: \mathbb{R} \times \mathcal{F}(V_1, V_2) \rightarrow \mathcal{F}(V_1, V_2) \text{ με}$$

νόμο:

$$\cdot((\lambda, f)) = \lambda f, \text{ για κάθε } (\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{F}(V_1, V_2).$$

Συμπεραίνουμε την ίδια παρατήρηση όπως και πριν ότι συμβολίζουμε με το σύμβολο $f_1 + f$ για το άθροισμα των συναρτήσεων $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(V_1, V_2)$ όπως και με το άθροισμα των στοιχείων του V_1 και του V_2 δηλαδή με το ίδιο σύμβολο αν και πρόκειται για διαφορετικές πράξεις.

(22)

Ισχύει τώρα το ερώτημα: (αφήνεται ως άλυτο πρόβλημα)
Η δομή $(\mathcal{I}(V_1, V_2), +, \cdot)$ είναι διανυσματικός
χώρος όπου οι πράξεις $+$ και $\cdot$ μιλούν για στοιχεία
του $\mathcal{I}(V_1, V_2)$ είναι αυτές που ορίστηκαν προηγουμένως.

Έστω τώρα $(V, +, \cdot)$ να είναι ένας διανυσματικός
χώρος.

Ο χώρος $\mathcal{I}(V, \mathbb{K})$ ονομάζεται ο διανυσματικός του
 $(V, +, \cdot)$ και συμβολίζεται με V^* .

Έστω τώρα ότι ο $(V, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος
παραγωγής διάστασης n με n να μην είναι 0 και $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ να είναι μια διατεταγμένη βάση
του V .

Ός γνωστόν μια τριπλήτων συνάρτηση $\varphi: V \rightarrow \mathbb{K}$ ή
αλλιώς ένα στοιχείο του V^* είναι πλήρως καθορισμένο
από τους αριθμούς $\varphi(u_i)$ για $i=1, 2, \dots, n$ μόνο,
δηλαδή από ένα πεπερασμένο πλήθος τιμών πάνω
στα στοιχεία της βάσης του V .

Αντίστροφα εάν $w \in V$ υπάρχει $\lambda_i \in \mathbb{K}$ για $i=1, 2, \dots, n$
ώστε: $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ (αφού η
 $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ είναι βάση του V).

(23)

Επίσης, αφού γ φ είναι γραμμική ισχύει:

$$\varphi(w) = \varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n) = \varphi(\lambda_1 u_1) + \varphi(\lambda_2 u_2) + \dots + \varphi(\lambda_n u_n) = \lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2) + \dots + \lambda_n \varphi(u_n)$$

άρα για το ορισμένο στοιχείο $w \in V$, γ τιμή του

$\varphi(w)$ είναι πλήρως καθορισμένο μόνο από τους γραμμικούς φθγους $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n)$.

Επίσης, από το προερασμένο είναι

$\{\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n)\}$ καθορίζεται γ τιμή

$\varphi(w)$ για φ σε καθέ $w \in V$.

Με βάση αυτή την παρατήρηση ορίζουμε τώρα

κάποιες γραμμικές συναρτήσεις τις $\varphi_i^*: V \rightarrow \mathbb{R}$

ως εξής:

Για καθέ σταθερό καθέ φορά $i \in T_n = \{1, 2, \dots, n\}$

ορίζουμε την φ_i^* ως εξής:

$$\varphi_i^*(u_j) := \begin{cases} 1 & \text{αν } j=i \\ 0 & \text{αν } j \neq i \end{cases}$$

για καθέ $j=1, 2, \dots, n$ και αφού καθορίζεται

γ τιμή για φ_i^* πάνω στα u_j , $j=1, 2, \dots, n$

έπεται από την προηγούμενη παρατήρηση ότι

(24)

η γιγνή της φ_i , για $i=1,2,\dots,n$ είναι απύρως
 γνωστή σε σχέση με V

Ισχύει ότι ο χώρος $\mathcal{I}(V, \varphi) = V^*$ έχει

πενταμερές διάνυσμα φ με φ , δηλαδή όσον αφορά V
 και για βάση του είναι το σύνολο $\{\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*\}$.

Η βάση $\{\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*\}$ του V^* που ορίζεται
 από την βάση $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ του V ονομάζεται η
 συζυγής βάση της $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Το ότι η $\{\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_n^*\}$ είναι βάση του V^*
 είναι γνωστό από την γραμμική άλγεβρα και αφύεται
 ως εύκολη άσκηση για τον αναγνώστη.

Έστω τώρα $(V_1, +, \cdot), (V_2, +, \cdot), \dots, (V_n, +, \cdot)$
 να είναι η διανυσματικοί χώροι, όπου γενικά οι
 πράξεις της πρόσθεσης είναι διαφορετικές για τους
 χώρους $V_1, V_2, \dots, V_n$, όπως το συμβολίζουμε
 με το ίδιο σύμβολο $+$. Το ίδιο ισχύει και για τον
 αριθμητικό πολλαπλασιασμό των χώρων $V_1, V_2, \dots, V_n$.
 Θέτουμε $V := V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ τον χώρο γινόμενο

(25)

των χώρων $V_1, V_2, \dots, V_n$.

Ορίσουμε δύο νέες πράξεις πρόσθεσης και αριθμητικού πολλαπλασιασμού στον χώρο V ως εξής: Την πρόσθεση:

$+$: $V \times V \rightarrow V$ που ορίζεται ως εξής,

$$+(((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n))) =$$

$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \text{ για κάθε}$$

$$((u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n)) \in V \times V \text{ και τον}$$

αριθμητικό πολλαπλασιασμό που ορίζεται ως εξής:

$$\bullet : \mathbb{R} \times V \rightarrow V \text{ όπου:}$$

$$\bullet((\lambda, (u_1, u_2, \dots, u_n))) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n) \text{ για}$$

$$\text{κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } (u_1, u_2, \dots, u_n) \in V.$$

Είναι προφανές ότι οι πράξεις $+$ και $\bullet$ ορίζονται κατά τον V από τις αντίστοιχες πράξεις των

$V_1, V_2, \dots, V_n$.

(26)

Με βάση τις προηγούμενες πράξεις + και $\cdot$ του χώρου V ισχύει το εής:

Η δομή $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος (αποδεικνύεται εύκολα άμεσα).

Ειδική περίπτωση του παραπάνω διανυσματικού χώρου $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ είναι η περίπτωση όπου $(V_1, +, \cdot) = (V_2, +, \cdot) = \dots = (V_n, +, \cdot)$, δηλαδή η περίπτωση όπου όλοι οι διανυσματικοί χώροι $(V_i, +, \cdot)$ ταυτίζονται για $i=1, 2, \dots, n$ και έτσι θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο συνόλου $(V_1 \times V_1 \times \dots \times V_1, +, \cdot)$.

Αν ο είναι το μηδενικό στοιχείο του V_1 , τότε το $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n\text{-φορές}})$ είναι το μηδενικό στοιχείο του $\underbrace{V_1 \times V_1 \times \dots \times V_1}_{n\text{-φορές}}$.

Αν $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$, τότε το διάνυσμα

$(-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$ είναι το αντίθετο στοιχείο του

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ως προς την πρόσθεση του $V_1 \times V_1 \times \dots \times V_1$.

Θα συμβολίζουμε αυτό με :

$$V_1^n = \underbrace{V_1 \times V_1 \times \dots \times V_1}_{n\text{-φορές}}$$

Τανυστές (Πλειογραμμικές απεικονίσεις)

Σε αυτό το μάθημα θα θεωρούσαμε μόνο διανυσματικούς χώρους πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$, τους οποίους θα ονομάζουμε πραγματικούς διανυσματικούς χώρους. Έστω V να είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος και $k \in \mathbb{N}$. Ο k -πλάθι γινόμενο $\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_k$ θα δηλώνεται με V^k .

(αν $k=1$, θα γράφουμε $V^1 = V$).

Μια συνάρτηση $T: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ θα καλείται

k -τανυστής στον χώρο V ή πλειογραμμική αν για κάθε $i \in \mathbb{N}$ με $1 \leq i \leq k$ και οποιδήποτε διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_k$ και u'_i που ανήκουν στο V ισχύουν:

$$1) T((u_1, \dots, u_i + u'_i, \dots, u_k)) = T((u_1, \dots, u_i, \dots, u_k)) + T((u_1, \dots, u'_i, \dots, u_k)) \text{ και για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ισχύει:}$$

$$2) T((u_1, \dots, \lambda u_i, \dots, u_k)) = \lambda T((u_1, \dots, u_i, \dots, u_k))$$

(28)

Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{T}^k(V)$ το σύνολο όλων των k -ταυσετών στο V , δηλαδή το σύνολο όλων των συναρτήσεων $T: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν τις προηγούμενες δύο ιδιότητες για όλους τους δείκτες $i=1, \dots, k$.

Από το αξίωμα της ελεύθερης το $\mathcal{T}^k(V)$ είναι ένα καλά ορισμένο σύνολο.

Παραδείγματα ηλαιοειδών συναρτήσεων -

k -ταυσετών

1) Εσωτερικό γινόμενο

Έστω V να είναι ένας πραγματικός, διανυσματικός χώρος.

Ένα εσωτερικό γινόμενο επί του V είναι μία συνάρτηση $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, όπου με

$\langle, \rangle$ θα συμβολίζουμε το θεωρούμενο

(29)

εσωτερικό γινόμενο.

Α. $(u, v) \in V \times V$, την θυσία $\langle, \rangle (u, v)$

του εσωτερικού γινομένου $\langle, \rangle$ στο στοιχείο $(u, v) \in V^2$

της συμβολίζουμε με: $\langle, \rangle ((u, v)) := \langle u, v \rangle$.

Το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1) $\langle u, w \rangle = \langle w, u \rangle$, για κάθε $(u, w) \in V \times V$

2) $\langle \lambda u, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $(u, w) \in V \times V$

3) $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$ για
κάθε $u, v, w \in V$

4) $\langle u, u \rangle \geq 0$ για κάθε $u \in V$, $u \neq 0$.

Επίσης $u, w \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\langle u, \lambda w \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle \lambda w, u \rangle \stackrel{(2)}{=} \lambda \langle w, u \rangle \stackrel{(1)}{=} \lambda \langle u, w \rangle \quad (5)$$

Για κάθε $u, v, w \in V$ έχουμε:

$$\langle w, u + v \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle u + v, w \rangle \stackrel{(3)}{=} \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$\stackrel{(1)}{=} \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle \quad (6)$$

Από τις (2), (3), (5) και (6) έπεται ότι το εσωτερικό γινόμενο $\langle, \rangle$ είναι ένας 2-κανονικός στο V .

Ορίσμοι

Έστω $A' \in (\mathbb{R}^2)^2$, όπου $(\mathbb{R}^2)^2 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$,

$A' = ((a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22}))$, όπου :

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$.

Αν το A' ορίζουμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$F: (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τον:

$$F((a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22})) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \text{ Θα δείξουμε ότι } \hookrightarrow F \text{ είναι ένα}$$

2 - γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$.

Έστω $x, y, w \in \mathbb{R}^2$. Θα δείξουμε ότι:

$$F((x+y, w)) = F((x, w)) + F((y, w))$$

(31)

Есть от $x = (a_{11}, a_{12}), \quad y = (b_{11}, b_{12})$

$w = (a_{21}, a_{22})$ Example:

$$F(x+y, w) = F((a_{11}, a_{12}) + (b_{11}, b_{12}), (a_{21}, a_{22})) =$$

$$= F(((a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{12}), (a_{21}, a_{22}))) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + b_{11}) \cdot a_{22} - a_{21} (a_{12} + b_{12}) =$$

$$= a_{11} a_{22} + b_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} - a_{21} b_{12} =$$

$$= (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) + (b_{11} a_{22} - a_{21} b_{12}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= F((a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22})) + F((b_{11}, b_{12}), (a_{21}, a_{22}))$$

$$= F((x, w)) + F((y, w)) \quad (1)$$

(32)

Εύρω $\lambda \in \mathbb{R}$,

Εύρω:

$$\begin{aligned}
 F((\lambda x, \omega)) &= F((\lambda(q_{11}, q_{12}), (q_{21}, q_{22}))) = \\
 &= F(((\lambda q_{11}, \lambda q_{12}), (q_{21}, q_{22}))) = \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda q_{11} & \lambda q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} = \lambda q_{11} \cdot q_{22} - \lambda q_{12} \cdot q_{21} = \\
 &= \lambda \cdot (q_{11} \cdot q_{22} - q_{12} \cdot q_{21}) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} \\
 &= \lambda \cdot F((q_{11}, q_{12}), (q_{21}, q_{22})) = \lambda \cdot F((x, \omega)) (2).
 \end{aligned}$$

Εύρω γινόμεν

$z = (b_{21}, b_{22}) \in \mathbb{R}^2$. Εύρω:

$$\begin{aligned}
 F((x, \omega + z)) &= F(((q_{11}, q_{12}), (q_{21}, q_{22}) + (b_{21}, b_{22}))) \\
 &= F(((q_{11}, q_{12}), (q_{21} + b_{21}, q_{22} + b_{22}))) = \\
 &= \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} + b_{21} & q_{22} + b_{22} \end{vmatrix} =
 \end{aligned}$$

(33)

$$= a_{11} \cdot (a_{22} + b_{22}) - a_{12} \cdot (a_{21} + b_{21}) =$$

$$= a_{11} a_{22} + a_{11} b_{22} - a_{12} a_{21} - a_{12} b_{21} =$$

$$= (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) + (a_{11} b_{22} - a_{12} b_{21}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= F((a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22})) + F((a_{11}, a_{12}), (b_{21}, b_{22}))$$

$$= F(x, w) + F(x, z) \quad (3)$$

$$F(x, \lambda w) = F((a_{11}, a_{12}), \lambda(a_{21}, a_{22})) =$$

$$= F((a_{11}, a_{12}), (\lambda a_{21}, \lambda a_{22})) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \lambda a_{22} - a_{12} \lambda a_{21} =$$

$$= \lambda \cdot (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot F((a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22})) = \lambda \cdot F(x, w) \quad (4)$$

(34)

Από τις παραπάνω ιδιότητες (1), (2), (3) και (4)
έπεται ότι η F είναι ένας 2-γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$.

3) Γενική μορφή ορίσματος

Για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ ορίζουμε ως συνάρτηση

$$T: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-φορές}} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mu \in \text{τον εἶδη του } \mu:$$
$$(συμβολικά) (\mathbb{R}^n)^n = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-φορές}}$$

$$q = ((q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n}), (q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n}), \dots, (q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{nn}))$$
$$\in (\mathbb{R}^n)^n, \text{ τότε:}$$

$$T(((q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n}), (q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n}), \dots, (q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{nn})))$$

$$= \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{vmatrix}$$

$$T_n \text{ ορίζεται του } n \times n \text{ πίνακα } \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

(35)

Θα δείξουμε ότι η T είναι n -γραμμική στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Έστω τυχαία $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$
 Υποθέτουμε ότι: $x_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ για

κάθε $i=1, 2, \dots, n$ και $y_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in})$

Εκτός:

$$T((x_1 + y_1, x_2, \dots, x_n)) =$$

$$= T((a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{12}, \dots, a_{1n} + b_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}))$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

(36)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= T((a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})) \\
 &+ T((b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})) \\
 &= T((x_1, x_2, \dots, x_n)) + T((y_1, x_2, \dots, x_n)) / 1
 \end{aligned}$$

Τα πρόπονα είναι αληθινά και οι αληθινότητες από τις
 ιδιότητες των ορισμών των ορισμών είναι η T
 είναι ένας υποσύνολος των $\mathbb{N}^n$. As δείξουμε / γράφω
 την ιδιότητα ότι τον ορισμό των ορισμών ως
 προς ένα δέντρο, as αλληλ. τον ορισμό.

(37)

Έστω λ σκάλος $\lambda \in \mathbb{R}$ και $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$,
 όπου $x_i = (q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{in})$ για κάθε $i=1, 2, \dots, n$ και
 $q_{ij} \in \mathbb{R}$ για κάθε $(i, j) \in T_n^2 = T_n \times T_n$ όπου
 $T_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Example:

$$\begin{aligned}
 & T((\lambda x_1, x_2, \dots, x_n)) = \\
 &= T((\lambda(q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n}), (q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n}), \dots, (q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{nn}))) = \\
 &= T(((\lambda q_{11}, \lambda q_{12}, \dots, \lambda q_{1n}), (q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n}), \dots, (q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{nn}))) \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda q_{11} & \lambda q_{12} & \dots & \lambda q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \lambda \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \det A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda \cdot T(((q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n}), (q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n}), \dots, (q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{nn}))) \\
 &= \lambda \cdot T((x_1, x_2, \dots, x_n))
 \end{aligned}$$

Παρόμοια αποδεικνύονται οι ανάλογες ιδιότητες του n -ταυτοσημεία για για κάθε άλλο δείγμα εκτός από τον πρώτο.

Παρατήρηση

Για $n=1$ το σύνολο $\mathcal{I}^1(V)$ είναι ο διανυσματικός χώρος του V , τον οποίο ως γνωστό τον συμβολίζουμε και με V^* , δηλαδή: $\mathcal{I}^1(V) = V^*$.

Έστω $T_1, T_2 \in \mathcal{I}^k(V)$. Ορίζουμε για κάθε

συνάρτηση $T_1 + T_2 : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ με τρόπο:

$$(T_1 + T_2)(u) = T_1(u) + T_2(u) \text{ για κάθε } u \in V^k.$$

Επίσης για $\lambda \in \mathbb{R}$ και $T \in \mathcal{I}^k(V)$ ορίζουμε για κάθε

συνάρτηση $\lambda T : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ με τρόπο:

$$(\lambda T)(u) = \lambda \cdot T(u), \text{ για κάθε } u \in V^k.$$

Πρόταση 1

Με τους παραπάνω συμβολισμούς ισχύει ότι:

$$T_1 + T_2, \lambda T \in \mathcal{I}^k(V).$$

Απόδειξη

Εσθθερονοοιούμε καποια $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ κα,

$u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n$ κα, $u'_i \in V$, υποθέτουμε ότι,

$i \neq 1$ κα, $i \neq n$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Εχουμε: Για $\vec{u} = (u_1, \dots, u_i + u'_i, \dots, u_n) \in V^k$, $(T_1 + T_2)(\vec{u}) =$

$$(T_1 + T_2)((u_1, \dots, u_i + u'_i, \dots, u_n)) \stackrel{\text{ορισμός του } T_1 + T_2}{=}$$

$$= T_1((u_1, \dots, u_i + u'_i, \dots, u_n)) + T_2((u_1, \dots, u_i + u'_i, \dots, u_n))$$

οι $T_1, T_2 \in \mathcal{T}^k(V)$

$$\stackrel{\text{A}}{=} (T_1((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)) + T_1((u_1, \dots, u'_i, \dots, u_n)) +$$

$$+ (T_2((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)) + T_2((u_1, \dots, u'_i, \dots, u_n)))) =$$

$$= (T_1((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)) + T_2((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n))) +$$

$$+ (T_1((u_1, \dots, u'_i, \dots, u_n)) + T_2((u_1, \dots, u'_i, \dots, u_n)))$$

$$\stackrel{\text{ορισμός } T_1 + T_2}{=} (T_1 + T_2)((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)) + (T_1 + T_2)((u_1, \dots, u'_i, \dots, u_n))$$

Παρόμοια αποδεικνύεται και για $i=1$ κα, $i=n$.

(41)

Για $v = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$ για $i \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq 1, i \neq n$
όπου $v \in V^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(T_1 + T_2)((u_1, \dots, \lambda u_i, \dots, u_n)) \stackrel{\text{ορίσμος } T_1 + T_2}{=}$$

$$= T_1((u_1, \dots, \lambda u_i, \dots, u_n)) + T_2((u_1, \dots, \lambda u_i, \dots, u_n)) =$$

$$\stackrel{T_1, T_2 \in \mathcal{T}^n(V)}{\Rightarrow} \lambda T_1((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)) + \lambda T_2((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n))$$

$$\stackrel{\text{επιμεταβολή ποσότητας}}{=} \lambda (T_1((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)) + T_2((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)))$$

$$\stackrel{\text{ορίσμος } T_1 + T_2}{=} \lambda ((T_1 + T_2)((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)))$$

Το παραπάνω ισχύει παρόμοια και για $i=1$ ή $i=n$ και
για οποιαδήποτε $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
Άρα $T_1 + T_2 \in \mathcal{T}^n(V)$.

(42)

Εταθερούμε ειν $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε

έναν $T \in \mathcal{L}^4(V)$

Για το διάνυσμα $\vec{u} \in V^4$ έχουμε:

$$(\lambda_0 T)(\vec{u}) = (\lambda_0 T)((u_1, \dots, u_i + u'_i, \dots, u_n)) =$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{ορισμός του } \lambda_0 T} \lambda_0 \cdot T((u_1, \dots, u_i + u'_i, \dots, u_n)) \xrightarrow{\text{ορισμός του } T} \lambda_0 \cdot (T((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)) + T((u_1, \dots, u'_i, \dots, u_n))) \\ & \xrightarrow{\text{επιμετρική ορισμός του } \lambda_0 T} \lambda_0 \cdot T((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)) + \lambda_0 T((u_1, \dots, u'_i, \dots, u_n)) \end{aligned}$$

$$= (\lambda_0 T)((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)) + (\lambda_0 T)((u_1, \dots, u'_i, \dots, u_n)) =$$

$\uparrow$
ορισμός του $\lambda_0 T$.

Για το $\mu \in \mathbb{R}$ και $(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) \in V^4$,

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq 1$, $i \neq n$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (\lambda_0 T)((u_1, \dots, \mu u_i, \dots, u_n)) & \xrightarrow{\text{ορισμός του } \lambda_0 T} \lambda_0 \cdot T((u_1, \dots, \mu u_i, \dots, u_n)) = \\ & \xrightarrow{\text{ορισμός του } T} \lambda_0 \cdot (\mu \cdot T((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n))) \xrightarrow{\text{ορισμός του } \lambda_0 T} \mu \cdot (\lambda_0 T((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n))) \\ & = \mu \cdot ((\lambda_0 T)((u_1, \dots, u_i, \dots, u_n))) \end{aligned}$$

$\uparrow$
ορισμός του $\lambda_0 T$

(43)

Η) παραμένω ιδιότητες, εκτός για την ιδιότητα αντιστάσης και για $i=1$ και $i=4$.

Αυτά δείχνουν ότι $\lambda_0 T \in \mathcal{I}^4(V)$, για κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ και κάθε $T \in \mathcal{I}^4(V)$. ■

Από την πρόταση 1 ορίζουμε, μετά από δύο πράξεις: η πρόσθεση

$$+ : \mathcal{I}^4(V) \times \mathcal{I}^4(V) \rightarrow \mathcal{I}^4(V), \text{ όπου}$$

$$+((T_1, T_2)) \stackrel{\text{def}}{=} T_1 + T_2 \text{ για κάθε}$$

$$(T_1, T_2) \in \mathcal{I}^4(V) \times \mathcal{I}^4(V) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{I}^4(V))^2 \text{ και}$$

ο επιθυμητός ομομορφισμός:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{I}^4(V) \rightarrow \mathcal{I}^4(V), \text{ όπου:}$$

$$\cdot((\lambda, T)) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \cdot T \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda, T) \in \mathbb{R} \times \mathcal{I}^4(V).$$

Με τους προηγούμενους συλλογισμούς, ισχύει η
 ετήη πρόταση 2

Πρόταση 2

Η δομή $(\mathcal{T}^k(V), +, \cdot)$ είναι

διανυσματικός χώρος

Απόδειξη (παράδειγμα)

Η απόδειξη της πρότασης 2 είναι απλή, αλλά
 θέλω ρουτίνα να δείξουμε ότι η ιδιότητα του
 διανυσματικού χώρου για αφήνεται ως εδωκεν (απόδειξη).
 Θα δείξουμε μία μόνο ιδιότητα εδώ ενδεικτικά.
 Έστω $T_1, T_2 \in \mathcal{T}^k(V)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει:

$$\lambda \cdot (T_1 + T_2) = \lambda T_1 + \lambda T_2.$$

Έστω $\vec{u} \in V^k$. Έχουμε:

$$(\lambda \cdot (T_1 + T_2))(\vec{u}) = \lambda((T_1 + T_2)(\vec{u})) =$$

↑
 από τον ορισμό του $\lambda(T_1 + T_2)$

(45)

$$= \lambda \cdot (T_1(\vec{u}) + T_2(\vec{u})) =$$

λ ποσ του αρίθμ του $T_1 + T_2$

$$= \lambda \cdot T_1(\vec{u}) + \lambda \cdot T_2(\vec{u}) =$$

→ επιπλέον ιδιότητα των αρχικών αριθμών

$$= (\lambda T_1)(\vec{u}) + (\lambda T_2)(\vec{u}) =$$

λ ποσ του αρίθμ του λT_1 και του λT_2

$$= (\lambda T_1 + \lambda T_2)(\vec{u}) \quad (1)$$

λ ποσ του αρίθμ του $\lambda T_1 + \lambda T_2$

Από 1) ισχύει ότι υπάρχει $\vec{u} \in V^4$ τέτοιο, ότι:

$$\lambda(T_1 + T_2) = \lambda T_1 + \lambda T_2.$$

Το μινιμουμ στοιχείο του $\mathcal{J}^4(V)$ είναι η

πλειοψηφική συνθήκη $\mathcal{O}: V^4 \rightarrow \mathbb{R} \mid \mu \in$

τόσο: $\mathcal{O}((u_1, \dots, u_n)) = 0$, για κάθε $(u_1, \dots, u_n) \in V^4$. ■

(46)

Διανυσματών.

Πενερασμένα αθροίσματα

Έστω $v \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών, δηλαδή $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$).

Θα συμβολίζουμε με $T_1 = \{1\}$ και $T_v = \{1, 2, \dots, v\}$ για $v \in \mathbb{N}$ με $v \geq 2$.

Έστω $a: T_v \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μια τυχούσα

συνάρτηση, σε ένα διανυσματικό χώρο V τυχαίο

Θα συμβολίζουμε με $a_i := a(i)$ για κάθε

$i \in T_v$ για ανώτερη, αφού γράφοντας a_i

χρησιμοποιούμε μόνο δυο σύμβολα τα a και τον

δείκτη i , ενώ όταν γράφουμε $a(i)$ χρησιμο-

ποιούμε 4 σύμβολα και το i σε αυτό το σύμβολο

είναι μεγαλύτερο από το i στο σύμβολο a_i .

Έτσι γράφοντας a_i αντί για $a(i)$ εξοικονομού-

με και χρόνο και χώρο.

Θα συμβολίζουμε τώρα με

$$\sum_{i=1}^v a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_v. \text{ Μια παρατήρηση}$$

παρόμοια με την προηγούμενη, ισχύει και για αυτό
των συμβολισμούς.

(47)

Βέβαια το σύμβολο $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ που έχουμε
(και είναι υγιεινό) δεν είναι αυστηρά γραμμένο.

Πιο τυπικά θα έπρεπε να το ορίσουμε επαγωγικά,
δηλαδή να πούμε ότι ορίζουμε :

$$\sum_{i=1}^1 a_i = a_1, \quad \sum_{i=1}^2 a_i = a_1 + a_2 \quad \text{και ότι εάν}$$

έχουμε ορίσει το σύμβολο $\sum_{i=1}^n a_i$ για κάποιο

κελ n με $n \geq 2$, τότε ορίζουμε:

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + a_{n+1} \quad \text{φυσικά για μία}$$

τέτοια θεωρία θα έπρεπε να έχουμε αναφέρει
τα σχετικά με τη μαθηματικής επαγωγής από την
θεωρία βωτών.

Αυτό είναι ένα θέμα το οποίο παραλείψαμε εδώ
για να μην επιβαρύνουμε με υπερβολικά σύμβολα
το μάθημά μας. Αυτό πάντως είναι ένα θέμα
που μπορεί να το βρει εύκολα ο φοιτητής
σε βιβλία θεωρίας βωτών στα οποία παρα-
λείψαμε για περισσότερες λεπτομέρειες περί
μαθηματικής επαγωγής.

(48)

Εδώ δεν θα επεξηγηθούμε άλλο ως προς την θεωρία των επαγωγικών ορισμών εννοιών και των επαγωγικών αποδείξεων, αλλά θα θεωρήσουμε ότι ο φοιτητής έχει ήδη τις εξοικειώσεις με αυτές.

Έστω τώρα $n, m \in \mathbb{N}$ και $a: T_n \times T_m \rightarrow \mathbb{N}$ να είναι μια τυχαία συνάρτηση.

Για κάθε $(i, j) \in T_n \times T_m$, θα συμβολίζουμε με:

$$a_{i,j} = a((i, j)) \text{ για απόλυτα}$$

Σταθεροποιούμε τώρα ένα τυχαίο $i_0 \in T_n$.

Ορίζουμε την μερική συνάρτηση

$$a_{i_0}: T_m \rightarrow \mathbb{N} \text{ με τον:}$$

$$a_{i_0}(j) := a_{i_0,j} \text{ για κάθε } j \in T_m. (1)$$

Συμβολίζουμε με:

$$\sum_{j=1}^m a_{i_0,j} := \sum_{j=1}^m a_{i_0}(j) = \sum_{j=1}^m (a_{i_0})_j / (*)$$

(Θα τον $\sum_{j=1}^m (a_{i_0})_j$ είναι το άθροισμα $\sum_{i=1}^m a_i$ με

τον προηγούμενο συμβολισμό για $a_{i_0} = a$).

(49)

Αρα με την βοήθεια του συλλογισμού στην (1)

η (2) διαφύεται:

$$\sum_{j=1}^m a_{i_0, j} = a_{i_0, 1} + a_{i_0, 2} + \dots + a_{i_0, m}.$$

Ανάλογα για κάθε $i \in T_v$, θα συλλογιστούμε με:

$$\sum_{j=1}^m a_{i, j} = a_{i, 1} + a_{i, 2} + \dots + a_{i, m}.$$

Στηθεροποιούμε τώρα ένα $j_0 \in T_m$.

Ορίζουμε την μερική συνάρτηση

$$a_{j_0} : T_v \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο:}$$

$$a_{j_0}(i) = a_{i, j_0} \text{ για κάθε } i \in T_v. (3)$$

Συλλογιστούμε με:

$$\sum_{i=1}^v a_{i, j_0} = \sum_{i=1}^v a_{j_0}(i) = \sum_{i=1}^v (a_{j_0})_i =$$

$$= (a_{j_0})_1 + (a_{j_0})_2 + \dots + (a_{j_0})_v. (4)$$

(όπου το άθροισμα $\sum_{i=1}^v (a_{j_0})_i$ είναι το άθροισμα

$\sum_{i=1}^v a_i$ με τον αρχικό συλλογισμό του αθροίσματος για $a_{j_0} = a$

(50)

Από τον συλλογισμό 674 (4) αντιστοιχώντας
από την (3) παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^v a_{i,j_0} = a_{1,j_0} + a_{2,j_0} + \dots + a_{v,j_0}.$$

Γενικά για κάθε $j \in T_m$ θα συλλογιστούμε με:

$$\sum_{i=1}^v a_{i,j} = a_{1,j} + a_{2,j} + \dots + a_{v,j} \quad (5)$$

Έτσι με βάση τον συλλογισμό 674 (5) ορίζουμε την
συνάρτηση $\theta: T_m \rightarrow \mathbb{V}$ με τρόπο:

$$\theta(j) := \sum_{i=1}^v a_{i,j} \quad \text{για κάθε } j \in T_m.$$

Θα συλλογιστούμε τώρα με:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^v a_{i,j} = \sum_{j=1}^m \theta(j) = \sum_{j=1}^m b_j \quad (\text{με τον}$$

αρχικό συλλογισμό του αθροίσματος για $a = \theta$) (6).

Αρα από τον ορισμό της θ και την (6) έπεται

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^v a_{i,j} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^v a_{i,j} \right) \quad (7).$$

(51)

Απόφαση από την (6) έχουμε:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j} = b_1 + b_2 + \dots + b_m =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{i,1} + \sum_{i=1}^n a_{i,2} + \dots + \sum_{i=1}^n a_{i,m} \quad (8).$$

Ανάλογα με τον τρόπο ορισμού του συμβόλου

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j} \text{ παίρνουμε το σύμβολο:}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j} = \sum_{j=1}^m a_{1,j} + \sum_{j=1}^m a_{2,j} + \dots + \sum_{j=1}^m a_{n,j} \quad (9).$$

Θα συμβολίζουμε τώρα με

$$\sum_{(i,j) \in T_n \times T_m} a_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{i,j} \text{ το άθροισμα}$$

όλων των $a_{i,j}$ της μορφής $a_{i,j}$ για όλα τα $(i,j) \in T_n \times T_m$ παίρνοντας T_n και T_m διασυστάσεις

τα $(i,j) \in T_n \times T_m$ παίρνοντας

$a_{i,j}$ αριθμώς μια φορά τον αριθμό i σε T_n και j σε T_m το άθροισμα,

δηλαδή $\sum_{(i,j) \in T_n \times T_m} a_{i,j} = \sum_{i \in T_n} \left(\sum_{j \in T_m} a_{i,j} \right)$

(52)

~~Επειδή~~ όσον το άθροισμα αυτό είναι πλήρως καθορισμένο λόγω του ότι το άθροισμα ενός πεπερασμένου πλήθους ^{διαιρεμάτων} είναι μοναδικό από τη ιδιότητα της αντιμεταθετικότητας και προσεταιριστικότητας.

Είναι γνωστό τώρα από την προηγούμενη ότι θα το θεωρήσουμε γνωστό) ότι ισχύει:

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j}.$$

Ανάλογα ορίζονται τα άθροισματά μας μορφή $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l a_{i,j,k}$ με τρεις δείκτες

i, j, k , όπου τα $n, m, l \in \mathbb{N}$.
 Δε θα επεξεργαστούμε σε τέτοια άθροισματά μας ποία ορίζονται με ανάλογο τρόπο όπως τα διπλά άθροισματά μας να μην επιβαρύνουμε το κείμενο με υπερβολικά συμβολισμούς, αλλά το οποίο φανερώναμε ότι θα προσαρμόσει γρήγορα σύμφωνα μαζί το ότι θα ξεκαθαρίσει τα πράγματα.

(53)

Για αυτό θα φροντίσουμε στην συνέχεια να αναφερθούμε μόνο σε 2-ταυστές όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τον συμβολισμό των διολών αθροισμάτων σε αυτούς.

Με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς θα δείξουμε την ελώς πρόταση για 2-ταυστές.

Πρόταση 3 (Βασική πρόταση)

Έστω V να είναι ένας αυθαίρετος διανυσματικός χώρος πεπερασμένος ή άπειρος διάστασης.

Έστω $S \in \mathcal{I}^2(V)$, δηλαδή ο S είναι ένας 2-ταυστής.

Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε δύο πεπερασμένες οικογένειες από διανύσματα του V ,

τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ και τα $w_1, w_2, \dots, w_m \in V$.

Θεωρούμε επίσης δύο αντίστοιχες οικογένειες πραγματικών αριθμών τους $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ και $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$.

Ορίζουμε από τα παραπάνω δύο διανύσματα του V τα $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ και

$b = \sum_{j=1}^m \mu_j w_j$, όπου τα a, b ορίζονται με τον

συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου περί πεπερασμένων αθροισμάτων διανυσμάτων.

(54)

Τότε ισχύει:

$$S((a, b)) = \sum_{(i, j) \in T_n \times T_m} \lambda_i \mu_j S((u_i, w_j)), \text{ όπου}$$

ο συνδυασμός αυτός του αθροίσματος έχει οριστεί
στην προηγούμενη παράγραφο περί πεπερασμένων
αθροισμάτων διανυσμάτων (εδώ συμβαίνει να είναι αριθμοί).

Απόδειξη

Αρχικά δείχνουμε το $\epsilon\}$ ης:

Έστω $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,
και $w \in V$. Τότε ισχύει:

$$1) S\left(\left(\sum_{i=1}^n v_i, w\right)\right) = \sum_{i=1}^n S((v_i, w)) \text{ και}$$

$$2) S\left(w, \sum_{i=1}^n v_i\right) = \sum_{i=1}^n S((w, v_i)).$$

Η (1) ισχύει για $n=2$ από τον ορισμό του
2-πινυστή S .

Ας υποθέσουμε ότι η (1) ισχύει για κάποιο
 $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$. Τότε για τη διάνυσμα

$v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$ έχουμε:

$$S\left(\left(\sum_{i=1}^{u+1} v_i, w\right)\right) = S\left(\left(\sum_{i=1}^u v_i\right) + v_{u+1}, w\right) \quad \begin{array}{l} \text{ταυτοτης} \\ \text{ο } S \text{ είναι 2-} \end{array}$$

$$= S\left(\left(\sum_{i=1}^u v_i, w\right)\right) + S(v_{u+1}, w) =$$

$$= \sum_{i=1}^u S(v_i, w) + S(v_{u+1}, w) =$$

↑
επαγωγικό βήμα

$$\sum_{i=1}^{u+1} S(v_i, w) \text{ και εδείχθη το ζητούμενο}$$

για $u+1$ και άρα επαγωγικά ισχύει η (1).

Η (2) αποδεικνύεται παρόμοια όπως και η (1).

Χρησιμοποιώντας τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} S(a, b) &= S\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, b\right)\right) \quad \begin{array}{l} \text{απο την (1)} \\ \text{ο } S \text{ είναι 2-ταυτοτης} \end{array} \\ &= \sum_{i=1}^n S(\lambda_i u_i, b) \quad \begin{array}{l} \text{ο } S \text{ είναι 2-ταυτοτης} \\ \text{απο το } b \end{array} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i S(u_i, b) = \sum_{i=1}^n \lambda_i S\left(u_i, \sum_{j=1}^m \mu_j w_j\right) \end{aligned}$$

(56)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \cdot \left(\sum_{j=1}^m S(u_i, \mu_j w_j) \right) \right) \quad \underline{\text{επιμ. ιδ. προηγούμενων}} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_i S(u_i, \mu_j w_j) \right) \quad \underline{0 \text{ } S \text{ είναι 2-τετανητή}} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \lambda_i \cdot (\mu_j S(u_i, w_j)) \right) \quad \underline{\text{αριθμός η επ. αθροισμάτων}} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j S(u_i, w_j) = \\
&= \sum_{(i,j) \in T_n \times T_m} \lambda_i \mu_j S(u_i, w_j)
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τις ιδιότητες των πεπερασμένων αθροισμάτων που συζητήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. ■

(57)

Η πρόταση 3 είναι το βασικό αποτέλεσμα που μας επιτρέπει να αντιθέσουμε πληροφορίες για την δομή του $\mathcal{T}^2(V)$ ως διανυσματικού χώρου όταν ο V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Σαν αντί εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης 3 παίρνουμε τα εξής:

Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης ίδιος με η για κάποιο ορισμένο $n \in \mathbb{N}$. Έστω $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ να είναι μια διατεταγμένη βάση του V , (δηλαδή $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V^n$). Έστω $S \in \mathcal{T}^2(V)$.

Από τον 2 -τυποσχή S και την διατεταγμένη βάση $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ του V ορίζονται οι πραγματικοί αριθμοί $S_{i,j} := S((u_i, u_j))$ για κάθε $(i,j) \in T_n^2$, όπου $T_n = \{1, \dots, n\}$, όπου $T_n^2 = T_n \times T_n$. Τότε από τους n^2 στο πλήθος πραγματικών αριθμούς $S_{i,j}$, για όλα τα $(i,j) \in T_n^2$, ορίζεται η τιμή του S σε κάθε άλλο στοιχείο του V^2 ως εξής: Έστω τοχόν $(a,b) \in V^2$.

(58)

Από το u & v είναι βάσεις του V υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_i \in \mathbb{R}$, για $i \in T_n$ και $\mu_j \in \mathbb{R}$ για $j \in T_n$ ώστε:
 $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ και $b = \sum_{j=1}^n \mu_j u_j$. Τότε από την πρόταση 3 παίρνουμε ότι:

$$S((a, b)) = \sum_{(i, j) \in T_n^2} \lambda_i \mu_j S((u_i, u_j)) =$$

$$= \sum_{(i, j) \in T_n^2} \lambda_i \mu_j S_{i, j}^{(*)}, \text{ όπου το προηγούμενο}$$

αθροισμα είναι αυτό που ορίσαμε στις σελίδες 51 και 52

δηλαδή το $\sum_{(i, j) \in T_n \times T_n} q_{i, j}$ για την περίπτωση όπου

$$q_{i, j} = \lambda_i \mu_j S((u_i, u_j)), \text{ και } v = m = n.$$

Έτσι αρκούν οι n^2 τιμές $S_{i, j}$, για όλα τα $(i, j) \in T_n^2$ του τεταρτη S για να υποστηρίξουμε την τιμή του S σε κάθε στοιχείο του V^2 .

Αλλά ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, κάθε συνάρτηση που ορίζεται με έναν τρόπο της παραπάνω μορφής (*) είναι ένας 2-τεταρτης στον V .

Συγκεκριμένα έχουμε την ακόλουθη πρόταση 4

(59)

Πρόταση 4

Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένου διαστάσεων n με n για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ να είναι μια διατεταγμένη βάση του V .

Θεωρούμε τώρα μια αυθαίρετη συνάρτηση

$$C: T_n^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{και την σταθεροποιούμε.}$$

Θα συμβολίζουμε με $C_{i,j} := C((i,j))$ για κάθε $(i,j) \in T_n^2$ για απόλυτη συμβολισμός.

Ορίζουμε τώρα μια συνάρτηση $S: V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τον εξής τρόπο:

Για να ορίσουμε την S αρκεί να καθορίσουμε την τιμή που παίρνει σε κάθε στοιχείο του V^2 .

Έστω λοιπόν τυχόν στοιχείο $(a,b) \in V^2$.

Αφού $a, b \in V$ και n B είναι βάση του V , υπάρχουν μοναδικά καθορισμένοι πραγματικοί αριθμοί

$\lambda_i \in \mathbb{R}$ και $\mu_j \in \mathbb{R}$ για όλα τα $(i,j) \in T_n^2$ έτσι ώστε να ισχύει $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ και $b = \sum_{j=1}^n \mu_j u_j$,

(ως γνωστόν από την γραμμική άλγεβρα).

(60)

Ορίσουμε τώρα:

$$S((a, b)) = \sum_{(i, j) \in T_n^2} \lambda_i \mu_j C_{ij}.$$

Με παρόμοιο τρόπο ορίσουμε την τιμή της S σε κάθε στοιχείο του V^2 .

Τότε η καλά ορισμένη συνάρτηση S που ορίσαμε παραπάνω είναι ένας 2-γανυστής στον V .

Απόδειξη (επὶς βλ. 115)

Θα μας χρειαστούν πρώτα κάποια προληψία για των συμβολισμῶν.

Έστω A να είναι ένα πεπερασμένο μη κενό σύνολο και $f: A \rightarrow V$ να είναι μια τυχούσα συνάρτηση στον V .

Τότε υπάρχει ένας μοναδικός φυσικός αριθμός $m \in \mathbb{N}$

που εκφράζει το πλήθος των στοιχείων του A

(γνωστό από την θεωρία συνόλων). Τότε υπάρχει μια 1-1, επί συνάρτηση

$i: T_m \rightarrow A$. Ορίσουμε τον αριθμό

$$\sum_{k=1}^m f_{ik} \text{ ο αριθμός } \sum_{k=1}^m f_{ik} = \sum_{k=1}^m (f \circ i)_k = \sum_{k=1}^m (f \circ i)(y_k).$$

Επομένως ο αριθμός $\sum_{k=1}^m (f \circ i)_k$ είναι αυτός που

έχουμε ορίσει την σειρά 46 για $a = f(i)$ και $v = w$.

Ο αριθμός $\sum_{k=1}^m f_{i_k}$ δεν εξαρτάται από την ανάρτηση i με την οποία τον ορίσαμε.

Αντiadύ αν πάρουμε μια άλλη οποιαδήποτε ανάρτηση

$j: T_m \rightarrow A$ με $j \neq i$ (όπου j είναι 1-1 και επί) τότε ισχύει ότι:

$$\sum_{k=1}^m f_{j_k} = \sum_{k=1}^m f_{i_k}.$$

Το διάνυσμα f είναι αυτό $\sum_{k=1}^m f_{i_k}$

που δεν εξαρτάται από την συγκεκριμένη ανάρτηση i με την οποία τον ορίσαμε το υποσύνολο της εικόνας των στοιχείων $f(a)$ για όλα τα $a \in A$ και το συσχετισμένο

με $\sum_{a \in A} f(a)$. Το συσχετισμένο αυτό με

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in A} f_a = \sum_{k=1}^m f_{i_k}, \text{ όπου όπως}$$

πριν υποθέσαμε τον συσχετισμό να έχουμε

f_a (και δείχνει) αντί για $f(a)$, δηλαδή

$f_a = f(a)$ για οποιαδήποτε συσχετισμό.

(62)

Έστω τώρα f, g να είναι δύο τυχαίες συναρτήσεις
 όνου: $f: A \rightarrow V$ και $g: A \rightarrow V$.

Τώρα ορίζουμε την συνάρτηση $f+g: A \rightarrow V$ με τον:

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) \text{ για κάθε } a \in A.$$

Επίσης αν $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την συνάρτηση $\lambda f: A \rightarrow V$

$$\text{με τον: } (\lambda f)(a) = \lambda \cdot f(a) \text{ για κάθε } a \in A.$$

Ετσι έχουμε: με βάση τους παραγόμενους συμβολισμούς,
 ότι $f_a + g_a = f(a) + g(a) = (f+g)(a) = (f+g)_a \leftarrow$ σαν δείκτης
 εδώ το a , για κάθε $a \in A$

Απόλα έχουμε:

$$\lambda f_a = \lambda \cdot f(a) = (\lambda f)(a) = (\lambda f)_a \leftarrow \text{σαν δείκτης εδώ το } a \in A$$

για κάθε $a \in A$.

Με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς είναι εύκολο να πούμε
 την συνδυαστική ότι ισχύουν οι ιδιότητες:

$$1) \sum_{a \in A} (f_a + g_a) = \sum_{a \in A} f_a + \sum_{a \in A} g_a$$

$$(\text{όπου εννοούμε ότι: } \sum_{a \in A} (f_a + g_a) = \sum_{a \in A} (f+g)_a \text{ (όπως είπαμε)})$$

$$2) \sum_{a \in A} (\lambda f_a) = \lambda \cdot \sum_{a \in A} f_a \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\text{όπου } \lambda f_a = (\lambda f)_a \text{ όπως είπαμε πριν}).$$

(63)

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τους παραπάνω συσχετισμούς
και τις προηγούμενες δύο ιδιότητες.

Έστω αν $f: T_n \rightarrow V$ και $g: T_n \rightarrow V$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$
και V κάποιο διανυσματικό χώρο τότε ισχύει:

$$\sum_{i=1}^n f_i + \sum_{i=1}^n g_i = \sum_{i=1}^n (f_i + g_i) \quad (3)$$

(είναι εύκολο να ελέγξουμε τις προηγούμενες ιδιότητες 1) για
 $A = T_n$)

Έστω τώρα $a_1, a_2, b \in V$. Αφού v είναι βάση
του V , υπάρχουν μοναδικά ορισμένοι πραγματικοί
αριθμοί λ_i^1 για $i \in T_n$ ώστε $a_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^1 u_i$,

μοναδικά ορισμένοι πραγματικοί αριθμοί $\lambda_i^2 \in \mathbb{R}$ για
 $i \in T_n$ ώστε $a_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 u_i$ και μοναδικά ορισμένοι
πραγματοί αριθμοί $\mu_j \in \mathbb{R}$ για $j \in T_n$ ώστε:

$$b = \sum_{j=1}^n \mu_j u_j.$$

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ιδιότητες (3)
παίρνουμε:

(64)

$$q_1 + q_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^1 u_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 u_i \quad (\text{όπου } f_i = \lambda_i^1 u_i, g_i = \lambda_i^2 u_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n (\lambda_i^1 u_i + \lambda_i^2 u_i) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^1 + \lambda_i^2) u_i \quad (4), \text{ όπου}$$

η τελευταία ισότητα έπεται από το ότι:

$\lambda_i^1 u_i + \lambda_i^2 u_i = (\lambda_i^1 + \lambda_i^2) u_i$ για κάθε $i \in T_n$, από την ιδιότητα του διανυσματικού χώρου V .

Άρα από την (4) έχουμε ότι:

$$q_1 + q_2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^1 + \lambda_i^2) u_i.$$

Από τον τρόπο ορίσμού της συνάρτησης S έχουμε τώρα:

$$S((q_1 + q_2), b) = \sum_{(i,j) \in T_n^2} (\lambda_i^1 + \lambda_i^2) u_i c_{i,j} \quad \begin{matrix} \text{επιφ. ιδιότητα} \\ \text{προσθετική} \\ \text{αριθμών} \end{matrix}$$

$$= \sum_{(i,j) \in T_n^2} (\lambda_i^1 u_i c_{i,j} + \lambda_i^2 u_i c_{i,j}) \quad (5).$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $f: A \rightarrow V$ για την

$g: A \rightarrow V$, όπου $A = T_n^2$ (η ενεργόσφαιρα δράσης), που ορίζονται ως εξής:

Για $a \in A = T_n^2$, έστω $a = (i, j)$. Τότε ορίζουμε:

$$f_a = \lambda_i^1 \mu_j C_{i,j} \text{ και } g_a = \lambda_i^2 \mu_j C_{i,j} \quad (a = (i, j)).$$

Εφαρμόζουμε την παραπάνω ιδιότητα 1) στα 745
 συναρτήσεις f και g και παίρνουμε:

$$\sum_{a \in A} (f_a + g_a) = \sum_{a \in A} f_a + \sum_{a \in A} g_a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{(i,j) \in T_n^2} (\lambda_i^1 \mu_j C_{i,j} + \lambda_i^2 \mu_j C_{i,j}) =$$

$$= \sum_{(i,j) \in T_n^2} \lambda_i^1 \mu_j C_{i,j} + \sum_{(i,j) \in T_n^2} \lambda_i^2 \mu_j C_{i,j} \quad \underline{\underline{\text{ορίζουμε τους } S}}$$

$$= S((a_1, b)) + S((a_2, b)) \quad (6).$$

Από τις (5) και (6) παίρνουμε ότι:

$$S((a_1 + a_2, b)) = S((a_1, b)) + S((a_2, b)). \quad (7)$$

Εντελώς ανάλογα με την (7) αν εφαρμόσουμε 79
 παραπάνω ως προς την δεύτερη μεταβλητή παίρνουμε ότι:

$$S((b, a_1 + a_2)) = S((b, a_1)) + S((b, a_2)) \quad (8).$$

(66)

Έχουμε τώρα:

$$\lambda a_1 = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \lambda'_i u_i = \sum_{i=1}^n \lambda \cdot (\lambda'_i u_i) \quad \text{για } \lambda \in \mathbb{F} +$$

(από γνωστή ιδιότητα στα διανύσματα). (*)

Άρα: αφού $\lambda \cdot (\lambda'_i u_i) = (\lambda \lambda'_i) u_i$ (γνωστή ιδιότητα διανυσμάτων) παίρνουμε ότι:

$$\lambda a_1 = \sum_{i=1}^n (\lambda \cdot \lambda'_i) u_i \quad (9).$$

Από τον ορισμό της S και της (9) παίρνουμε ότι:

$$S((\lambda a_1, b)) = \sum_{(i,j) \in T_n^2} (\lambda \cdot \lambda'_i) u_j c_{ij} =$$

$$= \sum_{(i,j) \in T_n^2} \lambda \cdot (\lambda'_i u_j c_{ij}) = \lambda \cdot \sum_{(i,j) \in T_n^2} \lambda'_i u_j c_{ij} =$$

$$= \lambda \cdot S((a_1, b)) \quad (10).$$

Συμπεραίνουμε ότι η παραπάνω ιδιότητα (*) (γνωστή από τα διανύσματα) προκύπτει από την 2 προηγούμενη

για $A = T_n$ και $f: T_n \rightarrow V$ με $f(i) = \lambda'_i u_i$ για

κάθε $i \in T_n$, όπου $a = i$, $f(i) = f_i = f_a$.

(67)

Παράγουμε με την (10) που θέλουμε και ότι:

$S((b, a)) = \lambda((b, a))$ για κάθε $\lambda \in \mathcal{P}$, ως προς την δεύτερη μεταβλητή.

Το παραπάνω αποδεικνύει ότι ο S είναι ένας 2-ταυτοχής και η απόδειξη της πρότασης 4 ολοκληρώθηκε. ■

Από την πρόταση 4 για κάθε συνάρτηση

$C: T_n^2 \rightarrow \mathcal{P}$ υπάρχει κατά έναν 2-ταυτοχής $S \in \mathcal{T}^2(V)$.

Θέτουμε $a = u_i$ και $b = u_j$ για κάποιο

$(i, j) \in T_n^2$ παίρνοντας από τον ίδιο ορισμό του S στην πρόταση 4 ότι:

$S((u_i, u_j)) = C_{i,j}$. Άρα για κάθε $(i, j) \in T_n^2$

έχουμε ότι: $S((u_i, u_j)) = C_{i,j}$ από την πρόταση 4.

Από τα σχόλια μετά την βασική πρόταση 3 είδαμε ότι οι τιμές ενός 2-ταυτοχής $S \in \mathcal{T}^2(V)$ είναι πλήρως καθορισμένες όλες από την πεπερασμένη πλήθος

(68)

τιμών μόνο του S και συχευρίχεται από τους
 n^2 στο πλήθος αριθμούς $S_{i,j} := S((u_i, u_j))$

για $(i,j) \in T_n^2$.

Επίσης αυτές οι τιμές καθορίζουν έναν αριθμω-
ταυτοτή στο $\mathcal{T}^2(V)$ που τις ικανοποιεί.

Συχευρίχεται έχουμε την εξής παρατήρηση.

Παρατήρηση 5

Έστω $S_1, S_2 \in \mathcal{T}^2(V)$ με τους συχθολογικούς
της πρότασης 4. Υποθέτουμε ότι:

$$(S_1)_{i,j} = (S_2)_{i,j} \text{ για κάθε } (i,j) \in T_n^2$$

$$\text{όπου: } (S_1)_{i,j} := S_1((u_i, u_j)) \text{ και}$$

$$(S_2)_{i,j} := S_2((u_i, u_j)) \text{ για κάθε } (i,j) \in T_n^2.$$

Τότε ισχύει ότι: $S_1 = S_2$.

Απόδειξη

Από την ισότητα (*) στην σελίδα 58 έχουμε:

(69)

$$S_1((a,b)) = \sum_{(i,j) \in T_n^2} \lambda_i \mu_j (S_1)_{i,j} (1) \quad \text{και}$$

$$S_2((a,b)) = \sum_{(i,j) \in T_n^2} \lambda_i \mu_j (S_2)_{i,j} (2) \quad \text{όπου}$$

$$a = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \quad \text{και} \quad b = \sum_{j=1}^n \mu_j \mu_j.$$

Επειδή $(S_1)_{i,j} = (S_2)_{i,j}$ για κάθε $(i,j) \in T_n^2$
 από την υπόθεση και τις (1) και (2) έπεται ότι
 $S_1((a,b)) = S_2((a,b))$ για το τυχόν $(a,b) \in V^2$,
 όπου τα a, b ορίζονται όπως παραπάνω. Άρα

$$S_1 = S_2. \blacksquare$$

Συμπεραίναμε τώρα με $(C: T_n^2 \rightarrow \mathbb{R})$ το σύνολο
 όλων των συναρτήσεων $C: T_n^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με την προϋπόθεση
 που έχουμε θέσει στην εισαγωγή (θεωρία βωδίων).

(70)

Με βάση των προτάσεων 4) τώρα ορίζεται κατά
για συνάρτηση $f: (C: T_n^2 \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}^2(V)$,

οποια δεδομένη συνάρτηση $C: T_n^2 \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστοιχεί, τον
2-ταύτο $S \in \mathcal{F}^2(V)$ που ορίζεται στην πρόταση 4.
Θα δείξουμε τώρα την ελπίς πρόταση 6

Πρόταση 6

Η συνάρτηση $f: (C: T_n^2 \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}^2(V)$

που ορίζεται παραπάνω είναι 1-1 και επί.

Απόδειξη

Για το επί

Έστω το χόν ταύτο $S \in \mathcal{F}^2(V)$.

Από τον S ορίζουμε την ελπίς συνάρτηση $C: T_n^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$C((i, j)) = S((u_i, u_j))$ για οποιαδήποτε $(i, j) \in T_n^2$,

ή απλάως $C_{i,j} = S((u_i, u_j))$ για οποιαδήποτε $(i, j) \in T_n^2(n)$

(71)

Θεωρούμε τον τανυστή $f(c) \in T^2(V)$ που ορίζεται από την παραπάνω συνάρτηση f .

Από τα σχόλια στην βελίδα 67, μετὰ την πρόταση 4 έχουμε ότι:

$$(f(c))((u_i, u_j)) = C_{i,j} \text{ για κάθε } (i,j) \in T_n^2 / \sim.$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$(f(c))((u_i, u_j)) = S((u_i, u_j)) \text{ για κάθε}$$

$(i,j) \in T_n^2$ και άρα από την παρατήρηση 5

έπεται ότι: $f(c) = S$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι συνάρτηση επί.

Για το 1-1

Έστω $c_1, c_2 \in (c: T_n^2 \rightarrow \mathbb{R})$ με $c_1 \neq c_2$.

Αυτό σημαίνει ότι: υπάρχει κάποιο $(i_0, j_0) \in T_n^2$ ώστε:

$$c_1((i_0, j_0)) \neq c_2((i_0, j_0)).$$

Από τα σχόλια μετὰ την πρόταση 4 έχουμε ότι:

$$(f(c_1))((u_{i_0}, u_{j_0})) = c_1((i_0, j_0))^{(2)} \text{ και}$$

$$(f(c_2))((u_{i_0}, u_{j_0})) = c_2((i_0, j_0))^{(3)}$$

(72)

Αντιμεθεωρούμε από τις (2) και (3) στην (1) παίρνουμε:
 $(f(c_1))(c_{i_0}, y_{j_0}) \neq (f(c_2))(c_{i_0}, y_{j_0})$ (4).

Η (4) δείχνει ότι $f(c_1) \neq f(c_2)$.

Έτσι με την υπόθεση ότι $c_1 \neq c_2$ βρήκαμε ότι:

$f(c_1) \neq f(c_2)$. Αυτό μας λέει ότι η f είναι 1-1.

Η παραπάνω πρόταση 6 μας λέει ότι υπάρχει μια
πλήρης αντιστοιχία μεταξύ των 2-τενυστών του $\mathcal{T}^2(V)$
και των συναρτήσεων $c: \mathcal{T}_n^2 \rightarrow \mathcal{H}$.

Έτσι για να προσδιορίσουμε έναν τεनुστό $S \in \mathcal{T}^2(V)$
αρκεί να προσδιορίσουμε την αντιστοιχία συναρτήσεων
 $f^{-1}(S)$ από την οποία προέρχεται με την
πρόταση 4.

Αυτή η αντιστοιχία θα μας βοηθήσει για να
καθορίσουμε μια βάση του χώρου $\mathcal{T}^2(V)$ καθορίζοντας
τις αντιστοιχίες συναρτήσεων τους μέσω της συναρτήσεως f .
Ορίζουμε λοιπόν κάποιες ειδικές τέτοιες συναρτήσεις
 $c: \mathcal{T}_n^2 \rightarrow \mathcal{H}$ ως εξής:

(73)

Σταθεροποιούμε ένα $(i_0, j_0) \in T_n^2$.

Με βάση το (i_0, j_0) ορίζουμε μια συνάρτηση που

την συμβολίζουμε με $C_{i_0, j_0}^* : T_n^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$C_{i_0, j_0}^*((i, l)) = \begin{cases} 1 & \text{αν } (i, l) = (i_0, j_0) \\ 0 & \text{αν } (i, l) \neq (i_0, j_0) \end{cases}$$

για κάθε $(i, l) \in T_n^2$.

Παρόμοια για κάθε $(i', j') \in T_n^2$ ορίζουμε την
συνάρτηση $C_{i', j'}^* : T_n^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$C_{i', j'}^*((i, l)) = \begin{cases} 1 & \text{αν } (i, l) = (i', j') \\ 0 & \text{αν } (i, l) \neq (i', j') \end{cases}$$

για κάθε $(i, l) \in T_n^2$.

Όλες αυτές οι συναρτήσεις $C_{i', j'}^*$ για $(i', j') \in T_n^2$

που ορίσαμε παραπάνω είναι διαφορετικές

μεταξύ τους. Δηλαδή έχουμε το εξής αποτέλεσμα

(74)

Πηληγα 7

Έστω $(i, j), (i', j') \in T_n^2$ με $(i, j) \neq (i', j')$.

Τότε ισχύει: $C_{i,j}^* \neq C_{i',j'}^*$.

Απόδειξη

Έχουμε από τον ορισμό της $C_{i,j}^*$:

$C_{i,j}^*(i, j) = 1$ (1). Αυτός έχει από τον ορισμό της $C_{i',j'}^*$.

$C_{i',j'}^*(i, j) = 0$ (2) αφού $(i, j) \neq (i', j')$ από τον υποθέσει.

Από τις (1) και (2) έπεται ότι: $C_{i,j}^* \neq C_{i',j'}^*$ ■

Θέτουμε τώρα

$$C^* := \{ C_{i,j}^* \mid (i, j) \in T_n^2 \}$$
 το σύνολο

όλων των συναρτήσεων $C_{i,j}^* : T_n^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που

ορίζουμε παραπάνω. Από το Πηληγα 7 το C^*

περιέχει n^2 στοιχεία (αφού αυτό το σύνολο έχει

σε αντιστοιχία 1-1 με το σύνολο T_n^2 όπως είναι προφανές και το σύνολο T_n^2 έχει n^2 στοιχεία).

(75)

Άρα αφού η συνάρτηση f είναι 1-1 είναι,
οτι και το σύνολο $f(C^*)$ περιέχει n^2 στοιχεία.
Είπαμε πλέον είναι έτοιμοι να δώσουμε μια βάση
του διανυσματικού χώρου $\mathcal{I}^2(V)$.

Πρόταση 8

Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος
πεπερασμένης διάστασης n με $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ να είναι μια διατεταγμένη
βάση του V .

Έστω $f: (C: T_n^2 \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{I}^2(V)$ να είναι
η συνάρτηση που ορίζεται στην σχέση 70 και
 C^* το σύνολο που ορίζεται στην σχέση 74.

Τότε το σύνολο $f(C^*) \subseteq \mathcal{I}^2(V)$ είναι
μια βάση του $\mathcal{I}^2(V)$.

Απόδειξη (Εκτός όλης)

(76)

Επιλέγουμε μια σταθεροποιητική τυχαία σωδέρτηση

$$\lambda: T_n^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε την σωδέρτηση $H: T_n^2 \rightarrow \mathcal{J}^2(V)$ με

$$\text{όπου: } H((i,j)) = \lambda((i,j)) \cdot f(c_{i,j}^*) \text{ για}$$

$$\text{κάθε } (i,j) \in T_n^2.$$

Για $A = T_n^2$, τυχαία $a = (i,j) \in A$ και για

την σωδέρτηση $H: A \rightarrow \mathcal{J}^2(V)$ όπου το $\mathcal{J}^2(V)$
είναι διανυσματικός χώρος ορίζουμε το αθροισμα

$$\sum_{a \in A} H(a) = \sum_{a \in A} H_a \text{ που ορίζεται στην σχέση βλ.}$$

$$\text{Από τον ορισμό του το } \sum_{a \in A} H_a \in \mathcal{J}^2(V), \text{ αφού}$$

το $\mathcal{J}^2(V)$ είναι διανυσματικός χώρος και κάθε $H_a \in \mathcal{J}^2(V)$

για κάθε $a \in A$.

Αφού $\sum_{a \in A} H_a \in \mathcal{J}^2(V)$ έχει νόημα να υποστηρίξουμε

(77)

το $\left(\sum_{a \in A} H_a \right) (x)$ για κάθε $x \in V$?

Επιλέγουμε τυχαία σωρότητα $h: T_n^2 \rightarrow T_n^2$ η οποία να είναι 1-1 και ενλ. Άρα η σωρότητα $H \circ h: T_n^2 \rightarrow \mathcal{F}^2(V)$.

Σταθεροποιούμε την h .

Ορίζουμε τώρα:

$$\sum_{a \in A} H_a = \sum_{\ell=1}^{n^2} (H \circ h)_{\ell}^{(1)}. \text{ Έτσι αποδείχνει νόημα}$$

το άθροισμα $\sum_{a \in A} H_a$, όπως είχαμε και το

$$\sum_{\ell=1}^{n^2} (H \circ h)_{\ell} \in \mathcal{F}^2(V), \text{ αφού } (H \circ h)_{\ell} \in \mathcal{F}^2(V)$$

για κάθε $\ell \in T_n^2$.

(78)

Στη θεωρούμε τώρα ένα ορισμένο $(i_0, j_0) \in T_n$
θα υπολογίσουμε τώρα τον αριθμό

$$\left(\sum_{a \in A} H_a \right) (x) \quad \text{για} \quad x = (u_{i_0}, u_{j_0}) \in V^2$$

Από τον ορισμό στην (1) (6.1) θα έχουμε:

$$\left(\sum_{a \in A} H_a \right) (x) = \left(\sum_{\ell=1}^{n^2} (H \circ h)_\ell \right) (x) \quad \xrightarrow{\text{από τον ορισμό}} \text{αριθμός αθροισμάτων}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n^2} ((H \circ h)_\ell) (x) \quad (2)$$

Στη θεωρούμε τώρα ένα ορισμένο $\ell_0 \in T_{n^2}$. Θα
υπολογίσουμε το: $(H \circ h)_{\ell_0} (x)$. Έχουμε:

$$(H \circ h)_{\ell_0} (x) = (H \circ h)_{\ell_0} (u_{i_0}, u_{j_0}) =$$

$$= ((H \circ h)_{\ell_0}) (u_{i_0}, u_{j_0}) = (H(h(\ell_0))) (u_{i_0}, u_{j_0})$$

Αφού $h(\ell_0) \in T_n^2$ έστω ότι: $h(\ell_0) = (i_1, i_2) \in T_n^2$

(79)

Άρα έχουμε:

$$(H(h_0))(C(u_0, v_0)) =$$

$$= (H(C(u_1, v_2)))(C(u_0, v_0)) \quad (4).$$

Από τον ορισμό της H στην σελίδα 76 παίρνουμε:

$$(H(C(u_1, v_2)))(C(u_0, v_0)) =$$

$$= (\lambda((u_1, v_2)) \cdot \dagger(C_{u_1, v_2}^*)) (C(u_0, v_0)) =$$

$$= \lambda((u_1, v_2)) \cdot (\dagger(C_{u_1, v_2}^*)(C(u_0, v_0))) =$$

$$= \lambda((u_1, v_2)) \cdot C_{u_1, v_2}^*((i_0, j_0)) \quad (5).$$

Από την (5) έχουμε ότι:

$$(H \circ h)_{\ell_0}(x) \neq 0 \text{ μόνο αν } (u_1, v_2) = (i_0, j_0) \text{ και}$$

$$\text{τότε } (H \circ h)_{\ell_0}(x) = \lambda((i_0, j_0)) \text{ από την (5).}$$

Άρα τελικά έχουμε ότι:

$$\sum_{\ell=1}^{n^2} ((H \circ h)_{\ell})(x) = \lambda((i_0, j_0)) \quad (6).$$

Από π(2) και (6) έχουμε ότι:

$$\left(\sum_{a \in A} H a \right) (C(u_0, v_0)) = \lambda((i_0, j_0)) \quad \text{Άρα}$$

(80)

παρόμοια έχουμε ότι:

$$\left(\sum_{a \in A} H_a \right) ((u_i, v_j)) = \lambda((i, j)) \text{ για κάθε}$$

$$(i, j) \in T_n^2.$$

Ας υποθέσουμε τώρα τυχόν διατεταγμένο
συνδυασμό στοιχείων του βωσίου $f(C^*)$.

Αυτό σημαίνει ότι παίρνουμε ένα άθροισμα
της μορφής $\sum_{(i,j) \in T_n^2} \lambda((i,j)) \cdot f(C_{i,j}^*)$ που

$$(i,j) \in T_n^2$$

είναι το άθροισμα $\sum_{a \in A} H_a$ που υπέγραψε

προηγουμένως.

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει $\sum_{a \in A} H_a = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{(i,j) \in T_n^2} \lambda((i,j)) \cdot f(C_{i,j}^*) = 0 \text{ όπου}$$

$$(i,j) \in T_n^2$$

όταν γράφουμε 0 στο δεξί μέλος της

προηγούμενης ισότητας εννοούμε την μηδενική

(81)

συνάρτηση $\Phi: V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με νόμο:

$\Phi(x) = 0$, για κάθε $x \in V^2$, η οποία είναι
εvidens να δοθεί ότι είναι ένας 2-ανυσματικός
είναι το συνθετικό στοιχείο του $\mathcal{T}^2(V)$ ως προς
την πρόσθεση αυτού του χώρου.

Αφού $\sum_{a \in A} H_a = 0$ έπεται ότι ισχύει:

$\left(\sum_{a \in A} H_a \right) x = 0$ για κάθε $x \in V^2$. Εφαρμόζουμε

αυτή για $x = (u_i, u_j)$ για όλα τα $(i, j) \in T_n^2$ και
επείδη όντως δείξαμε πριν ισχύει ότι:

$\left(\sum_{a \in A} H_a \right) (u_i, u_j) = \lambda(i, j)$ για κάθε $(i, j) \in T_n^2$

έπεται ότι $\lambda(i, j) = 0$ για κάθε $(i, j) \in T_n^2$ πράγμα

που αποδεικνύει ότι η διαμόρφωση $\neq (c_{i,j}^*)$

του $\mathcal{T}^2(V)$ για $(i, j) \in T_n^2$ είναι πραγματικά
ανεξάρτητα.

(82)
Θα δείξουμε τώρα ότι το βέλος $\neq (C^*)$ είναι
στη βέβαια γεννητόρυν του $\mathcal{T}^2(V)$. Έστω $R \in \mathcal{T}^2(V)$.

Θέτουμε $R_{i,j} := R(u_i, v_j)$ για κάθε $(i,j) \in T_n^2$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $G: T_n^2 \rightarrow \mathcal{T}^2(V)$ με

νόμο: $G((i,j)) = R_{i,j} \cdot \neq (C^*_{i,j})$ για κάθε

$(i,j) \in T_n^2$. Ορίζουμε την $S \in \mathcal{T}^2(V)$ ως το

αθροίσμα $S = \sum_{a \in A} G_a$ όπου $G_a = G(a) =$

$= G((i,j))$ για $a = (i,j)$, με $(i,j) \in T_n^2$ και

$A = T_n^2$, και S ορίζεται όπως στην βελίδια 6).

Επιλέγουμε τυχαία συνάρτηση $g: T_n^2 \rightarrow T_n^2$ και

την μετασχηματίζουμε. Άρα η συνάρτηση

$G \circ g: T_n^2 \rightarrow \mathcal{T}^2(V)$ έχει

$S = \sum_{\ell=1}^{n^2} (G \circ g)_\ell$ ε' ορίζου.

Έχουμε: $S = \sum_{\ell=1}^{n^2} G(g(\ell)) = \sum_{\ell=1}^{n^2} G_g(\ell) =$

όπου κάθε συνάρτηση $Gg(\ell)$ για $\ell \in T_n^2$ είναι
 μία συνάρτηση της μορφής $R_{i,j} \cdot f(C_{i,j}^*)$ για κάποιο
 $(i,j) \in T_n^2$. Άρα η S είναι άρρηκτος συνδυασμός των
 συναρτήσεων του $f(C^*)$.

Σταθεροποιούμε ένα ορισμένο $(u_{i_0}, u_{j_0}) \in V^2$ για
 κάποιο $(i_0, j_0) \in T_n^2$.

Έχουμε ε' ορισμό:

$$\begin{aligned} S((u_{i_0}, u_{j_0})) &= \left(\sum_{a \in A} G_a \right) ((u_{i_0}, u_{j_0})) = \\ &= \left(\sum_{\ell=1}^{n^2} (G \circ g)_\ell \right) ((u_{i_0}, u_{j_0})) = \sum_{\ell=1}^{n^2} ((G \circ g)_\ell ((u_{i_0}, u_{j_0}))) \end{aligned} \quad (7).$$

Έστω τώρα $\ell_0 \in T_n^2$. Θα υποστηρίξουμε το

$$(G \circ g)_{\ell_0} ((u_{i_0}, u_{j_0})).$$

$$\text{Έχουμε: } (G \circ g)_{\ell_0} ((u_{i_0}, u_{j_0})) = (G(g(\ell_0)))((u_{i_0}, u_{j_0})) \quad (8)$$

⁽⁸⁴⁾
 Έχουμε ότι $g(p) \in T_h^2$ ε? ορίσθου. Έστω ότι
 $g(p) = (u_1, u_2)$ (9). Αντιστοιχίζουμε στο u_1 (8) στο (8)
 παρατηρούμε:

$$\begin{aligned}
 G(g(p))((u_{i0}, u_{j0})) &= G((u_1, u_2))((u_{i0}, u_{j0})) = \\
 &= (R_{u_1, u_2} \cdot f(C_{u_1, u_2}^*))((u_{i0}, u_{j0})) = \\
 &= R_{u_1, u_2} \cdot (f(C_{u_1, u_2}^*)((u_{i0}, u_{j0}))) = \\
 &= R_{u_1, u_2} \cdot C_{u_1, u_2}^*((i_0, j_0)) \quad (9)'
 \end{aligned}$$

Από τη (9)' έχουμε ότι

$(G \circ g)_p((u_{i0}, u_{j0}))$ είναι πάντα 0 ευθεία

και $(u_1, u_2) = (i_0, j_0)$ και

οπότε έχουμε: $(G \circ g)_p((u_{i0}, u_{j0})) = R_{i_0, j_0}(i_0)$

Άρα από (7) και (9) έχουμε:

$$S((u_{i0}, u_{j0})) = R_{i_0, j_0} = R((u_{i0}, u_{j0})) \quad \text{για } p$$

και $(i_0, j_0) \in T_h^2$ και άρα έχουμε

ότι: $S((u_i, u_j)) = R((u_i, u_j))$ για κάθε $(i, j) \in T_h^2$

και άρα $S = R$ από τη παρατήρηση 5.

§5

Από την παραπάνω έπεται ότι το R διασπάζεται
 σε γραμμικούς συνδυασμούς των $\varphi(C_{i,j}^*)$ για $(i,j) \in T_n^2$
 και άρα τέλως το $\varphi(C^*)$ είναι βάση του
 $\mathcal{F}^2(V)$, ο οποίος έχει έτσι διάσταση ίση με n^2 . ■

Είδαμε προηγούμενα τον γενικό τρόπο υπολογισμού ενός
 2-ταυστέρι επί ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης
 διάστασης, καθώς επίσης βρήκαμε και μια ορισμένη βάση
 του χώρου $\mathcal{F}^2(V)$.

Ανάλογους τρόπους μπορούμε να δείξουμε και για
 k -ταυστέρι στον V για $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, με ελαφρώς
 τρόπο, επιρροήμενοι στους 2-ταυστέρι και μπορούμε να
 βρούμε ανάλογα και μια ορισμένη βάση τους ομοειδή,
 όπως κάναμε για τους 2-ταυστέρι στον V .

Δεν θα το κάνουμε για δυο λόγους.

1ος λόγος: έλλειψη χρόνου. Η θεωρία αυτού του

μαθήματος είναι αρκετά επιτεταμένη και εμμέλως
 αναχαιτισμένοι σε των πραγμάτων να αναφέρουμε τα
 εντελώς απαραίτητα μέσα στα δεδομένα χρονικά
 περιθώρια

2ος Οι γενικοί τρόποι για k -ταυστέρι

με $k \geq 2$, απαιτούν υπολογισμούς πολύπλοκων

αθροισμάτων των οποίων οι ορίσεις από την φύση τους έχουν αρνητική περιητοιότητα, πράγμα που θα επιβάρυνε το κείμενο και μάλλον θα επέφερε βόλκους παρά θα βελτιώθηκε το πρόγραμμα.

Πάτω του ότι το μάθημα έχει μία οπτική προς την εισαγωγή στο θέμα, παρά προς την εξειδίκευση, προτιμάμε να αναφέρουμε την θεωρία μόνο για 2-3 συνδέσεις έτσι ώστε ο φοιτητής να πάρει μία ιδέα και να εισαχθεί σφαιρικά στο αντικείμενο παρά να εμμένει σε μία περιητοιότητα ορίσεων και να χάνει την ουσία του μαθήματος.

Φυσικά ο φοιτητής που ενδιαφέρεται, μπορεί (έχοντας αποκτήσει μία εισαγωγή στο αντικείμενο) να συμβάλει μετά το τέλος του μαθήματος μελέτων τα σχετικά βιβλιογραφικά της διδασκαλίας

Βιβλιογραφία

Να τονίσουμε επίσης ότι η μη αναφορά στους 2-3 συνδέες θα συνετόγχε το πρόγραμμα και ο φοιτητής θα ένωθε ότι δεν πατά σε έδαφος έδαφους μιας και οι 2-3 συνδέες είναι και οι πιο πρόσφατες ή βέβαια για την κατανόηση της δομής των

(87)

υ-ταυσεών για 473.

Έτσι προτιμώσαμε μια μέση οδó. Αυτάδς να είμαστε αναλυτικοί σε ότι αφορά 2-ταυσεάς και να παραλείγουμε την θεωρία για υ-ταυσεάς γενικά. Από εδώ και στο εξής η περιγραφή της θεωρίας θα είναι συνοπτική, λόγω του περιορισμένου χρόνου όπως είπαμε.

Θα αναφέραμε μόνο τα ενδεώς απαραίτητα με βασικό, σε πρώτη φάση να δώσουμε τον αριθμό ορίων της διαφορετικής μορφής.

Μετά θα συνεχίσουμε πάντα αναφέροντας τα ενδεώς απαραίτητα, έτσι ώστε να αναφερθούν τελικά στα σημαντικότερα θέματα της θεωρίας των διαφοριών μορφών.

(88)

Επί συνεχεία θα ορίσουμε μία πράξη πολλαπλασιασμού
σε ηλαιογραφημένες ανεικονίσεις. Αυτή η πράξη ονομάζεται
τους διαφόρους χώρους $\mathcal{I}^k(V)$ για διαφοροποιήσιμα.

Έστω $S \in \mathcal{I}^k(V)$ και $T \in \mathcal{I}^l(V)$ για $k, l \in \mathbb{N}$

Ορίζουμε την συνάρτηση $S \otimes T : V^{k+l} \rightarrow \mathbb{R}$ με
τον τρόπο:

$$(S \otimes T)((u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+l})) = \\ = S((u_1, \dots, u_k)) \cdot T((u_{k+1}, \dots, u_{k+l})) \text{ για}$$

κάθε $u_1, u_2, \dots, u_{k+l} \in V$.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $S \otimes T \in \mathcal{I}^{k+l}(V)$ (άσκηση)

Το γινόμενο αυτό έχει τις εξής ιδιότητες:

Έστω $S, S_1, S_2 \in \mathcal{I}^k(V)$, $T \in \mathcal{I}^l(V)$, $U \in \mathcal{I}^n(V)$

για κάποιες $k, l, n \in \mathbb{N}$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$, $T_1, T_2 \in \mathcal{I}^l(V)$

Τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες του γινομένου:

Οι ιδιότητες αυτές είναι εύκολοι στην απόδειξη
και αφήνονται ως εύκολη άσκηση στον αναγνώστη

$$1) (S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T$$

$$2) S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2,$$

$$3) (\lambda S) \otimes T = S \otimes (\lambda T) = \lambda \cdot (S \otimes T)$$

$$4) (S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U).$$

Το $(S \otimes T) \otimes U$ και το $S \otimes (T \otimes U)$ δηλώνονται από τη $S \otimes T \otimes U$. Ανάλογα ορίζονται και τα γινόμενα $T_1 \otimes \dots \otimes T_c$ διαπερισσότερους από τρεις παράγοντες. (*)

Το τανυστικό γινόμενο μας επιτρέπει να συμφορέσουμε και με ένα άλλο τρόπο για βάση του χώρου των τανυστών.

Ας το δείξουμε για 2-τανυστές.

Έστω V να είναι ένας διανυσματικός

περισσώμενος διάστασης n με n και έστω

$\varphi_i, i=1,2,\dots,n$ να είναι η βάση του βάσης

Δηλαδή $\varphi_i, i=1,2,\dots,n$ είναι η βάση του V^*

$$(*) \text{ Δηλαδή: } T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_{c+1} = (T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_c) \otimes T_{c+1}$$

ή $c=2, c \in \mathbb{N} \rightarrow$ με ορμή στους ευδοκότε χώρους

(90)

όπου για κάθε $i \in T_n$ ισχύει ότι: για $j \in T_n$

$$\varphi_i(u_j) = \begin{cases} 1 & \text{αν } j=i \\ 0 & \text{αν } j \neq i \end{cases}$$

Για κάθε $(i, j) \in T_n^2$, ισχύει ότι,

$\varphi_i \otimes \varphi_j \in T^2(V)$ από τον ορισμό του
ταυτογινώμενου $\otimes$.

Ας εξεταστούμε ένα $(i_0, j_0) \in T_n^2$.

Για το χόν $(u, v) \in T_n^2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (\varphi_{i_0} \otimes \varphi_{j_0})(u, v) &= \varphi_{i_0}(u) \cdot \varphi_{j_0}(v) = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{αν } (i_0, j_0) = (u, v) \\ 0 & \text{αν } (i_0, j_0) \neq (u, v) \end{cases} = C_{(i_0, j_0)}^*(u, v) \end{aligned}$$

Αυτό μας λέει ότι:

$$(\varphi_{i_0} \otimes \varphi_{j_0})(u, v) = C_{(i_0, j_0)}^*(u, v)$$

για κάθε $(u, v) \in T_n^2$. Άρα

$$(\varphi_{i_0} \otimes \varphi_{j_0})(u, v) = C_{(i_0, j_0)}^*(u, v)$$

για κάθε $(u, v) \in T_n^2$

Αρα $\varphi_{i_0} \otimes \varphi_{j_0} = \neq (C^*_{i_0, j_0})$ (από την παρατήρηση 5)

Αρα γενικά έχουμε ότι:

$$\varphi_i \otimes \varphi_j = \neq (C^*_{i,j}) \text{ για κάθε } (i,j) \in T_n^2$$

Έτσι έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 9

Το σύνολο $\{ \varphi_i \otimes \varphi_j \mid (i,j) \in T_n^2 \}$ αποτελεί

βάση του $\mathcal{D}T^2(V)$. Έχουμε επίσης ότι:

$$\varphi_i \otimes \varphi_j = \neq (C^*_{i,j}) \text{ για κάθε } (i,j) \in T_n^2$$

Στη γενική περίπτωση έχουμε το εξής:

Θεώρημα 10 (η απόδειξη παραλείπεται)

Έστω $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ να είναι μία βάση του V και

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ να είναι η δυϊκή της βάση.

Τότε το σύνολο όλων των k -οτών

τενυστομένων γινόμενων $\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_k}$,

$1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$ είναι μία βάση του $T^k(V)$,

ο οποῖος διασυνδυασμός έχει διάμετρο n^k .

(92)

Για την συνέχεια θα μας αναγκάσουν να ποιοι
ειδιικοί τύποι τανυστές, οι αντισυμμετρικοί
τανυστές.

Ορισμός

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος.

Ένας n -τανυστής $T \in T^n(V)$ ονομάζεται
αντισυμμετρικός αν

$$T((u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n))$$

$$= -T((u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n)), \text{ για}$$

όλη τη $u_1, \dots, u_n \in V$, όπου είναι παραπάνω
ισχύει υποθέτουμε ότι αλληλόμορφα αλληλο
θέτουμε τη u_i, u_j ενώ όλη τη άλλη διανυσματική
παραμένει στα θέματα τους, και αυτό μπορεί
να συμβαίνει για οποιαδήποτε j επιλεγεί δείχνει
 $(i, j) \in T_n^2$ με $i < j$

Είναι πολύ από να δούμε ότι αν

T_1 και T_2 είναι δύο αντισυμμετρικοί τανυστές
τότε και $T_1 + T_2$ είναι αντισυμμετρικός
τανυστής (άδεια)

(93)

Επίσης αν λείπει και ο T είναι αντισυμμετρικός
ταυτοδύναμος τότε και ο λT είναι αντισυμμετρικός
ταυτοδύναμος. (άσκηση)

Θεωρούμε τώρα το σύνολο :

$$\mathcal{S}^4(V) := \{ T \in \mathcal{T}^4(V) \mid \text{o } T \text{ είναι}$$

αντισυμμετρικός ταυτοδύναμος}.

Πέπει το $\mathcal{S}^4(V)$ σύνολο αφού το αξίωμα της
εξιδιμετρίας μας βεβαιώνει ότι το $\mathcal{S}^4(V)$ είναι
κλειστό ως προς το άθροισμα.

Αφού λοιπόν το $\mathcal{T}^4(V)$ είναι διανυσματικός
χώρος και το υποσύνολό του $\mathcal{S}^4(V)$ είναι
κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης
 k -ταυτοδύναμων και του αριθμητικού γινόμενου
εφαρμόζοντας αριθμολογία επί ενός k -ταυτοδύναμου
έπεται από γνωστή πρόταση τη διάκριση ότι
και το σύνολο $\mathcal{S}^4(V)$ είναι επίσης
διανυσματικός χώρος με τις ίδιες πράξεις

(94)

Για την απάντηση με τους περιορισμούς των πράξεων του $\mathcal{T}^4(V)$ στο $\mathcal{L}^4(V)$.

Για την βωδέση θα μας χρειάζονται υφόντες γνώσεις από τις μεταθέσεις και άλλες.

Για αυτό θα αναζητούμε παρακάτω την σχετική ορολογία.

Έστω X, Y, Z να είναι τρία σύνολα.

Όπως είπαμε μια βωδότηση $f: X \times Y \rightarrow Z$ ονομάζεται πράξη στο Z .

Θα μας αναχολήσουν πράξεις ειδικής μορφής όπου $X = Y = Z$.

Ας τι για f τις διάφορες πράξεις τις συμβολίζουμε με κάποια σύμβολα, όπως,

$+$, $\cdot$, $\times$, $\circ$, $\square$ κ.τ.λ.

Σε ένα μή γενό σύνολο K μπορούμε γενικά να ορίσουμε πολλές πράξεις. Για παράδειγμα σε ένα σύνολο $K = \{a, b\}$ με $a \neq b$ δηλαδή με δυο στοιχεία a και b μπορούμε να ορίσουμε αριθμώς 16 διαφορετικές πράξεις

της μορφής $\pi: K \times K \rightarrow K$.

Από όλες όμως τις πράξεις που μπορούμε να ορίσουμε σε ένα σύνολο μόνον ορισμένες από αυτές έχουν σημασία για την επιβίωση μαθηματική περιοχή που μελετούμε.

Οι πράξεις αυτές χαρακτηρίζονται, συνήθως, από τις ιδιότητες που έχουν.

Παρακάτω αναφέρουμε κάποιες γνωστές ιδιότητες πράξεων από την άλγεβρα που θα χρησιμοποιηθούμε και εμείς.

Έστω $K \neq \emptyset$ (ή K ένα σύνολο και

$\pi: K \times K \rightarrow K$ να είναι μία πράξη στο K .

Θα συμβολίζουμε ως συνήθως

$$x \pi y := \pi((x, y)) \text{ για κάθε } (x, y) \in K^2.$$

Ορισμός 1

Η πράξη π λέγεται προσαρμοσμένη εάν ισχύει ότι:

$$x \pi (y \pi z) = (x \pi y) \pi z \text{ για}$$

κάθε $x, y, z \in K$

(96)

Όταν μια πρόταση είναι προσεταιριστική τότε το αποτέλεσμα αυτής της πρότασης ανάλογα με την εφαρμογή των λογικών συνδέσμων είναι μοναδικό και διατηρούμε τη σειρά με την οποία εμφανίζονται οι όροι της πρότασης.

π.χ. Α $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ και η πρόταση η στο $\mathcal{L}$ είναι προσεταιριστική τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} & (x_1 \wedge x_2) \wedge (x_3 \wedge x_4) \wedge (x_5 \wedge x_6) = \\ & = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \wedge (x_5 \wedge x_6) = \\ & = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \wedge (x_4 \wedge x_5) \wedge x_6 = 4.7.2... \end{aligned}$$

Με άλλη λέξη μπορούμε να πούμε ότι όταν μια πρόταση είναι προσεταιριστική τότε το αποτέλεσμα της πρότασης μετά από την εφαρμογή των λογικών συνδέσμων του βωδίου είναι ανεξάρτητο από την εικόνα της προενδεύσεως αν η σειρά των λογικών δεν αλλάξει.

Ορισμός 2

Η πράξη η λέγεται μεταθετική
(ή αντιμεταθετική) αν ισχύει ότι:

$$x \eta y = y \eta x \text{ για κάθε } x, y \in K.$$

Εάν μια πράξη είναι ταυτόχρονα
προσεταιριστική και μεταθετική τότε το
αποτελεσμά της πράξης μεταξύ η στοιχείων
του K , $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι μοναδικό και
ανεξάρτητο από την σειρά της παραθεσίωσης και
την σειρά των στοιχείων όταν τα παίρνουμε
αριστερά μια φορά το καθένα στην σειρά τους
πράξη.

Ορισμός 3

Εάν στοιχείο του K καλείται
δεξιό ουδέτερο (αντίστοιχα αριστερό ουδέτερο)
ως προς την πράξη η αν ισχύει ότι:

$$a \eta e = a \text{ για κάθε } a \in K$$

(αντίστοιχα αν ισχύει: $e \eta a = a$ για κάθε
 $a \in K$). Αν το e είναι ταυτόχρονα δεξιό

(98)

και αριθμητικό ουδέτερο, τότε καλείται ουδέτερο.
 Αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο σε μια ηράξη, τότε
 αυτό είναι μοναδικό.

Ορισμός

Ένα στοιχείο a' (αντιστοιχεί a'') καλείται
 δεξιό συμμετρικό (αντιστοιχεί αριθμητικό συμμετρικό)
 ενός στοιχείου $a \in K$, ως προς τη ηράξη π
 με ουδέτερο στοιχείο 0 e εάν ισχύει ότι:
 $a \pi a' = e$ (αντιστοιχεί εάν $a'' \pi a = e$).

Αν ένα στοιχείο είναι ταυτόχρονα και δεξιό
 και αριθμητικό συμμετρικό του a τότε λέγεται
 συμμετρικό του a .

Αν ένα στοιχείο έχει συμμετρικό τότε αυτό
 είναι μοναδικό.

Ορισμός

Ένα ζεύγος (K, π) , όπου K είναι ένα
 μη κενό σύνολο και π είναι μια ηράξη στο K
 αποκαλείται ομόδω εάν ικανοποιούνται τα εξής:

- (1) H να είναι προγεννητική
 (2) H να έχει ουδέτερο στοιχείο
 (3) Κάθε στοιχείο του H έχει συμμετρικό στοιχείο ως προς την πράξη $\circ$.

Μια ομάδα $(H, \circ)$ για την οποία $\circ$ $\cap$ H είναι ενιαίο και μεταθετική ονομάζεται αβελιανή ομάδα.

Ορισμός

Έστω M να είναι μη κενό σύνολο και
 έστω $S(M)$ να είναι το σύνολο όλων των επί και
 1-1 συναρτήσεων $f: M \rightarrow M$, δηλαδή

$$S(M) := \{ f: M \rightarrow M \mid f \text{ είναι 1-1 και επί} \} = \\ = \{ f \in (g: M \rightarrow M) \mid f \text{ είναι 1-1 και επί} \}$$

που συμβολίζεται $(g: M \rightarrow M)$ του συνόλου των
 συναρτήσεων από το M στο M που έχουμε δώσει
 προηγουμένως. Από την βιολογία που ορίζεται το
 σύνολο M , τότε και το σύνολο $S(M)$ είναι

Παρά ορισμένο από το σύνολο της επιδιόρθωσης.
Ορίζουμε την πράξη της σύνθεσης μεταξύ των
στοιχείων του $S(M)$, δηλαδή την

$$\circ : S(M) \times S(M) \rightarrow S(M),$$

όπου: $\circ((f, g)) := f \circ g$ για κάθε

$$(f, g) \in S(M) \times S(M).$$

Τότε η δομή $(S(M), \circ)$ είναι ομάδα η
οποία είναι αβελιανή α. το M έχει ένα ή δύο
στοιχεία και η αβελιανή α. το M έχει
περσότερα από δύο στοιχεία.

Το συνδετικό στοιχείο της πράξης $\circ$ είναι
η ταυτότητα σωρότης $\text{id}_M : M \rightarrow M$ όπου

$$\text{id}_M(x) = x, \text{ για κάθε } x \in M \text{ και το}$$

συμμετρικό στοιχείο f' ενός στοιχείου

$f \in S(M)$ είναι η αντίστροφη σωρότης

f^{-1} της f , όπου $f^{-1} \in S(M)$ επίσης.

Η ομάδα $S(M)$ ονομάζεται η συμμετρική ομάδα επί του συνόλου M ή η ομάδα μεταθέσεων του M και τα στοιχεία της $S(M)$ ονομάζονται μεταθέσεις.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με τις συμμετρικές ομάδες $S(M)$ για M πεπερασμένο.

Έστω υποθέτουμε ότι $M = \{1, 2, \dots, n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε θα γράφουμε S_n αντί για $S(M)$ και η ομάδα S_n συχνά αναφέρεται σαν η συμμετρική ομάδα σε n -σύνολο και τα στοιχεία της S_n μεταθέσεις σε n -σύνολο.

Ορισμός

Έστω $\sigma \in S_n$ με την εής ιδιότητα:

Να υπάρχουν διακεκριμένα στοιχεία $a_1, \dots, a_n$ του $M = \{1, 2, \dots, n\}$ με $n \geq 2$ με την ιδιότητα:

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{n-1}) = a_n \text{ και}$$

$$\sigma(a_n) = a_1 \text{ και } \sigma(b) = b \text{ για κάθε}$$

$b \in M \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Μια τέτοια μετάθεση ονομάζεται κύκλος μήκους n ή n -κύκλος. (Ένας κύκλος n είναι και ο n -κύκλος για $n=1$).

(202)

Αν G είναι ένας κώδικας μήκους k και
υπάρχουν δύο υποσύνολα $\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$ και
 $\{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}\}$ του M για τα οποία ισχύει:

$$G(a_1) = a_2, \dots, G(a_{k-1}) = a_k, G(a_k) = a_1 \text{ και}$$

$$G(b_1) = b_2, \dots, G(b_{k-1}) = b_k, G(b_k) = b_1 \text{ και}$$

$$G(x) = x \text{ για κάθε } x \in M - \{a_1, \dots, a_k\} \text{ και}$$

$$G(y) = y \text{ για κάθε } y \in M - \{b_1, \dots, b_k\} \text{ τότε}$$

$$\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = \{b_1, b_2, \dots, b_k\} \text{ και } k=1.$$

Ισχύει: Ένας k -κώδικας G όπως παραπάνω του

συμβολίζουμε με $(a_1, a_2, \dots, a_k)$

Ένας κώδικας μήκους 2 καλείται αντιστρέφεται.

Δύο κώδικες $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ και $(b_1, b_2, \dots, b_k)$

λέγονται βέλτιστα μεταξύ τους εάν ισχύει:

$$\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_k\} = \emptyset.$$

Δύο βέλτιστα κώδικες αντιστρέφονται, δηλαδή ισχύει:

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \circ (b_1, b_2, \dots, b_k) = (b_1, b_2, \dots, b_k) \circ (a_1, a_2, \dots, a_k).$$

Πρόταση 11

Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο υψώντων ζένων μεταβλ τους ανά δυο.

Μια τέτοια παραβήτηση λέει, μάλιστα, εαν παραβλέγουμε την σειρά των παραβλήτων. Έστω $\sigma \in S_n$ και έστω ότι

$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_z$ η παραβήτηση της σ σαν γινόμενο υψώντων ζένων μεταβλ τους ανά 2. Τότε ο αριθμός z είναι πλήρως καθορισμένος από την σ .

Ορισμός

Ο αριθμός $(-1)^{n-z}$ ονομάζεται υπογραφή της $\sigma \in S_n$ όπου $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_z$ ως γινόμενο υψώντων ζένων μεταβλ τους ανά δυο. Συμβολίζουμε $\text{sgn } \sigma = (-1)^{n-z}$

Πρόταση 12

Η κάθε μετάθεση μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο αντιμεταθέσεων.

Η γραφή μιας μεταθέσεως δεν συνόψευε
αντιμεταθέσεων δεν είναι μοναδική.

Όπως για μεταθέσεις γράφεται πάντα
είτε σαν ένα συνόψευο ενός άρτιου αριθμού
αντιμεταθέσεων είτε σαν συνόψευο ενός
περιττού αριθμού αντιμεταθέσεων.

Αν μια μεταθέσεις γράφεται σαν συνόψευο ενός
άρτιου αριθμού αντιμεταθέσεων τότε λέγεται
άρτια και έχει υπογραφή ίση με 1, ενώ
σαν γράφεται σαν συνόψευο ενός περιττού
αριθμού αντιμεταθέσεων λέγεται περιττή και
έχει υπογραφή ίση με -1.

Μετά τις προηγούμενες ορολογίες για τις
μεταθέσεις μπορούμε να ορίσουμε τώρα κάποιους
ειδικούς τύπους που θα χρησιμοποιήσουμε στη
συνέχεια.

Πριν όμως από αυτό, ας περιγράψουμε πρώτα
αναλυτικά τα σύνολα S_1 , S_2 και S_3 .

Θα παριστάνουμε τη στοιχείο του S_n για $n \in \mathbb{N}$ σαν
 αντικείμενα με δύο πράξεις και n - στοιχεία

Ως συνόλους ορίζουμε $T_n := \{1, 2, \dots, n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Θα παριστάνουμε την ταύτιση συνάρτηση με id_n .

Διότι $\text{id}_n : T_n \rightarrow T_n$ με $\text{id}_n(i) = i$ για
 κάθε $i \in T_n$.

Θα συμβολίζουμε τις μεταθέσεις με $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, κ.τ.λ.

Έτσι, το S_1 έχει ένα μόνο στοιχείο την $\text{id}_1 : T_1 \rightarrow T_1$
 με $\text{id}_1(1) = 1$ άρα $T_1 = \{1\}$ και την παριστάνουμε σαν
 στο πίνακα 2×1 , δηλαδή $\text{id}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Το S_2 έχει $2! = 1 \cdot 2 = 2$ στοιχεία την id_2 και

την $\sigma_2 : T_2 \rightarrow T_2$ με $\sigma_2(1) = 2$ και $\sigma_2(2) = 1$ ή

αλλιώς $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ και $\text{id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Το S_3 έχει $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ στοιχεία τις

$\text{id}_3, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$, που πιο παραστασιακά τις
 συμβολίζουμε ως εξής:

(106)

$$\text{id}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Δεν θα επεξηγησούμε στα στοιχεία του S_n , για $n > 4$
γιατί δεν θα μας χρειάζοντο στο μάθημά μας.

Η S_n περιγράφεται πιο αναλυτικά σε βιβλία αφιερωμένα
άλγεβρας και συνδυαστικής.

Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος και $n \in \mathbb{N}$. Έστω $T \in \mathcal{T}^n(V)$. Ορίζουμε των συνάρτηση $\text{Alt}(T) : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ με τονο:

$$(\text{Alt}(T))(u_1, \dots, u_n) :=$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma \cdot T(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}) \quad (*)$$

όπου S_n είναι το σύνολο όλων των μεταθέσεων των αριθμών $1, \dots, n$.

Ισχύει η εξής πρόταση:

Πρόταση 13.

Με τις παραπάνω υποθέσεις για τον χώρο V , έστω $T \in \mathcal{T}^n(V)$. Τότε $\text{Alt}(T) \in \mathcal{Z}^n(V)$.
Αν $\omega \in \mathcal{Z}^n(V)$, τότε $\text{Alt}(\omega) = \omega$.
(χωρίς απόδειξη).

(*) το σύμβολο $\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma \cdot T(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)})$ σημαίνει ότι προσθέτουμε όλα τα γινόμενα της μορφής $\text{sgn} \sigma \cdot T(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)})$ για όλα τα $\sigma \in S_n$, ακριβώς μια φορά το καθένα παίρνοντας το σ αυτό το άθροισμα, το καθε $\sigma \in S_n$.

Παραπάνω ορίσαμε το σύμβολο $\text{Alt}(T)$
 στην (*) αλλά δεν εληγάσαν αριθμούς σε αυτό
 του ορίσμο, αλλά μάλλον περιγραφικούς.

Ε76, ας ορίσουμε εδώ το σύμβολο της
 άθροισης που εμφανίζεται στην (*) αστεριό σε
 αναλογία με τον ορίσμο του συμβόλου $\sum f(a)$ που
 ορίσαμε στις βελίδες 60 και 61 μεσα στην ^{α.ε.λ.} απόδειξη
 της πρότασης 4.

Θεωρούμε την παραπάνω ορολογία που περιγράφεται
 πριν το σύμβολο της άθροισης στην (*) στην βελίδα
 107.

Θεωρούμε την συνάρτηση $a: S_n \rightarrow \mathbb{R}$ που
 ορίζεται με τον τρόπο: $a(\sigma) = \text{sgn } \sigma \cdot T((u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}))$
 για κάθε $\sigma \in S_n$, όπου έχουμε σταθεροποιήσει
 ένα διάνυσμα $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V^n$ για να ορίσουμε

την τιμή
 $(\text{Alt}(T))(u_1, u_2, \dots, u_n)$ για τον δεδομένο
 n -τάυστο $T \in \mathcal{T}^k(V)$.

(109)

Έτσι για να ορίσουμε το σύνθετο της αθροιστικής
στην (*) πρέπει να ορίσουμε το σύνθετο

$$\sum_{b \in S_k} a(b) \text{ δηλαδή η αριθμός περιλαμβάνει αυτό το}$$

σύνθετο.

Παίρνουμε τυχαία συνάρτηση $\delta: T_k! \rightarrow S_k$
η οποία είναι 1-1 και επί (που υπάρχουν
(k!)! τέτοιες συναρτήσεις διαφορετικές) αφού τα
σύνθετα $T_k!$ και S_k έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων
έσο με $k!$. Έτσι ορίζεται η σύνθετη

$$a \circ \delta: T_k! \rightarrow S_k \text{ θεωρούμε το αθροιστικό}$$

$$\sum_{i=1}^{k!} (a \circ \delta)(i) = \sum_{i=1}^{k!} (a \circ \delta)_i \text{ που το έχουμε}$$

ορίσει στην σελίδα 46.

Έχουμε τώρα το εξής: Επιλέγουμε τυχαία 1-1 και επί

συνάρτηση $\delta: T_k! \rightarrow S_k$ διαφορετική από την

δ ($\delta_1 \neq \delta$) που υπάρχει αφού υπάρχουν $(k!)!$

έσο πλήθος τέτοιες συναρτήσεις.

(110)

Ορίζουμε για την δ ούτως ηουν την δ
το άθροισμα $\sum_{i=1}^n (a \circ \delta)_i$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει:

$$\sum_{i=1}^n (a \circ \delta)_i = \sum_{i=1}^n (a \circ \delta)_i \cdot (1) \text{ επειδή αυτό}$$

είναι το άθροισμα όλων των αριθμών της μορφής

$a(i)$ για όλα τα $i \in S_n$ που προφανώς είναι
μοναδικά από τις ιδιότητες της προεπιλεγμένης
και της αντιστοιχίας της προεπιλεγμένης των
πραγματικών αριθμών.

Αυτό το σταθερό άθροισμα που ορίζεται είναι

(1) το οποίο δεν εξαρτάται από την
επιλεγμένη σειρά δ με την οποία το
ορίσαμε το σύμβολό μας με:

$$\sum_{i \in S_n} a(i) = \sum_{i=1}^n (a \circ \delta)_i \quad \text{Έτσι, από την}$$

αριθμός n είναι το σύμβολο της άθροισης που
εμφανίζεται στην (*) της σελίδας 107.

Η συνάρτηση Alt : $\mathcal{I}^k(V) \rightarrow \mathcal{S}^k(V)$ η

οποία σε κάθε $T \in \mathcal{I}^k(V)$ αντιστοιχίζει το

$Alt(T) \in \mathcal{S}^k(V)$ από την προηγούμενη πρόταση
είναι γραμμική (ήβηση).

Με βάση τον ενδιάμεσο ταυτοτικό θα ορίσουμε
ένα νέο διάνυσμα, το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ
ταυτοτών το οποίο θα μας χρειαστεί για την
βωέχεια.

Έστω $k \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathcal{S}^k(V)$ και $\eta \in \mathcal{S}^l(V)$
για κάποιο $l \in \mathbb{N}$. Το $\omega \otimes \eta \in \mathcal{I}^{k+l}(V)$ αλλά δεν είναι
δεν ανήκει στο $\mathcal{S}^{k+l}(V)$.

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\omega \wedge \eta : V^{k+l} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με τον}:$$

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!} Alt(\omega \otimes \eta).$$

Από την πρόταση την προηγούμενη έχουμε ότι:

$Alt(\omega \otimes \eta) \in \mathcal{S}^{k+l}(V)$ και επειδή το $\mathcal{S}^{k+l}(V)$
είναι διανυσματικός χώρος έπεται ότι $\omega \wedge \eta \in \mathcal{S}^{k+l}(V)$.

Το εσωτερικό γινόμενο $\wedge$ έχει τις
 παρακάτω ιδιότητες:

1) $\wedge$ $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{J}^k(V)$, $\eta \in \mathcal{J}^l(V)$ τότε ισχύει:

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$$

2) $\wedge$ $\omega \in \mathcal{J}^k(V)$ και $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{J}^l(V)$ τότε
 ισχύει:

$$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$$

3) $\wedge$ $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathcal{J}^k(V)$ και $\eta \in \mathcal{J}^l(V)$ τότε

ισχύει:

$$i) (a\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (a\eta) = a(\omega \wedge \eta) \quad \text{και}$$

$$ii) \omega \wedge \eta = (-1)^{kl} (\eta \wedge \omega)$$

4) $\wedge$ $\omega \in \mathcal{J}^k(V)$, $\eta \in \mathcal{J}^l(V)$, $\theta \in \mathcal{J}^m(V)$, και

$k, l, m \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει η προθεσμιότητα, ιδιότητα
 του εσωτερικού γινόμενου $\wedge$, δηλαδή:

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta).$$

Από τις παραπάνω ιδιότητες οι

i), ii), iii) είναι εύκολο να αφηθούνται ως άδεια

Οι ιδιότητες iii) και iv) αποδεικνύονται με μεγαλύτερη δυσκολία και η απόδειξή τους είναι εντός βλυσ.

Επειδή $\omega \wedge (u \wedge v) = (\omega \wedge u) \wedge v$ το εσωτερικό του ω στο $u \wedge v$ δίνεται από $\omega \wedge u \wedge v$.

Τα εσωτερικά του ω με περισσότερους παράγοντες ορίζονται ανάλογα.

Διότι αν έχει ορίσει το ω στο $\mathbb{R}^n$ τότε $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ που ανήκουν σε κάποιο χώρο, ορίζεται $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n$ και $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_{n+1} = 0$.

Όπως και στην περίπτωση του $\mathcal{I}^k(V)$ με V να είναι χώρος πολλαπλότητας k έχουμε $\mathcal{I}^k(V) \subset \mathcal{I}^n(V)$ και μπορούμε να βρούμε μία βάση για τον χώρο $\mathcal{I}^k(V)$.

Συμπληρώστε έχουμε το εξής θεωρήμα.

Θεώρημα 14

Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένου διαστάσεων n με n .

Οι οποίους θέτουμε $T_n := \{1, 2, \dots, n\}$.

Έστω $k \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$. ← σημαντικό αυτό!

Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο

$$T_n^k = \underbrace{T_n \times T_n \times \dots \times T_n}_{k\text{-φορές}}$$

Θέτουμε:

$$(T_n^k)^* := \{ (i_1, i_2, \dots, i_k) \in T_n^k \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k \}$$

Έστω $\varphi_i, i \in T_n$ να είναι η δυομή βάση της βάσης $V := (u_1, u_2, \dots, u_n)$ του V .

Τότε το σύνολο $\leftarrow$ εξωτερικά γινόμενα

$$\mathcal{L} := \{ \varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} \mid (i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n^k)^* \}$$

είναι μία βάση του $\Omega^k(V)$, ο οποίος έχει

διαστάση n με $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(χωρίς απόδειξη) $\left[\begin{array}{l} \text{Σημειώνουμε ότι: } 0! = 1, 1! = 1 \text{ και} \\ n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \text{ για } n \geq 2 \end{array} \right]$

Εφαντόμενος χώρος

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Σταθεροποιούμε n ένα διάνυσμα

$$p_0 := (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Θεωρούμε το n -ο υποσύνολο του χώρου

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbb{R}^n_{p_0} := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x = p_0 \}.$$

Το $\mathbb{R}^n_{p_0}$ είναι ένα καλά ορισμένο υποσύνολο του

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ από το αλγόριθμο της ελιπίδωσης.

Το σύνολο $\mathbb{R}^n_{p_0}$ αποτελεί εφ'απ'όψεως χώρο

του $\mathbb{R}^n$ στο p_0 .

Στο σύνολο $\mathbb{R}^n_{p_0}$ ορίζουμε δύο πράξεις:

Μια πράξη πρόσθεσης:

$$\oplus: \mathbb{R}^n_{p_0} \times \mathbb{R}^n_{p_0} \rightarrow \mathbb{R}^n_{p_0} \quad \text{όπου}$$

$$\oplus ((p_0, y_1), (p_0, y_2)) = (p_0, y_1) \oplus (p_0, y_2)$$

$$= (p_0, y_1 + y_2) \text{ για κάθε } (p_0, y_1), (p_0, y_2) \in \mathbb{R}^n_{p_0}.$$

Επίσης ορίζουμε ως αριθμητικό πολλαπλασιασμό

$$\cdot: \mathbb{R} \times \mathcal{P}_0^n \rightarrow \mathcal{P}_0^n \text{ με}$$

$$\cdot((\lambda, (p_0, x))) = \lambda \cdot (p_0, x) = (p_0, \lambda x), \text{ για}$$

κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $(p_0, x) \in \mathcal{P}_0^n$.

Είναι προφανές ότι οι πράξεις $\oplus$ και $\cdot$ στο

$\mathcal{P}_0^n$ είναι καλά ορισμένες, αφού ο $\mathcal{P}_0^n$ είναι διανυσματικός.

Θα δείξουμε τώρα την ετήη πρόταση:

Η δομή $(\mathcal{P}_0^n, \oplus, \cdot)$ είναι ένας αριθμητικός διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη

Δείχνουμε πρώτα ότι η δομή $(\mathcal{P}_0^n, \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Έστω $(p_0, y_1), (p_0, y_2) \in \mathcal{P}_0^n$. Τότε:

$$(p_0, y_1) \oplus (p_0, y_2) \stackrel{\text{ορισμός}}{=} (p_0, y_1 + y_2) \stackrel{\text{αλλαγή θέσης}}{=} (p_0, y_2 + y_1) \stackrel{\text{ορισμός}}{=} (p_0, y_2) \oplus (p_0, y_1)$$

για κάθε $(p_0, y_1), (p_0, y_2) \in \mathcal{P}_0^n$.

ορισμός για πρόταση $\oplus$ στο $\mathcal{P}_0^n$

Έστω $(p_0, y_1), (p_0, y_2), (p_0, y_3) \in \mathbb{P}^n_{p_0}$.

Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} & ((p_0, y_1) \oplus (p_0, y_2)) \oplus (p_0, y_3) \stackrel{\text{ορισμός του } \oplus}{=} \\ &= (p_0, y_1 + y_2) \oplus (p_0, y_3) \stackrel{\text{ορισμός του } \oplus}{=} (p_0, (y_1 + y_2) + y_3) \\ &\stackrel{\text{νόμος της πρόσθεσης στο } \mathbb{R}^n}{=} (p_0, y_1 + (y_2 + y_3)) \stackrel{\text{ορισμός του } \oplus}{=} (p_0, y_1) \oplus (p_0, y_2 + y_3) \\ &\stackrel{\text{ορισμός του } \oplus}{=} ((p_0, y_1) \oplus (p_0, y_2)) \oplus (p_0, y_3), \text{ δηλ.} \end{aligned}$$

υπόθεσε $(p_0, y_1), (p_0, y_2), (p_0, y_3) \in \mathbb{P}^n_{p_0}$.

Άρα η $\oplus$ είναι προσαρμοστική.

Αν υποθέσουμε ότι $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{για } (p_0, x) \in \mathbb{P}^n_{p_0}: & \\ (p_0, x) \oplus (p_0, \mathbf{0}) &\stackrel{\text{ορισμός του } \oplus}{=} (p_0, x + \mathbf{0}) = (p_0, x) = \\ &\stackrel{\text{νόμος της πρόσθεσης στο } \mathbb{R}^n}{=} (p_0, \mathbf{0} + x) \stackrel{\text{ορισμός του } \oplus}{=} (p_0, \mathbf{0}) \oplus (p_0, x), \text{ για υπόθεσε} \end{aligned}$$

$(p_0, x) \in \mathbb{P}^n_{p_0}$. Άρα το $(p_0, \mathbf{0}) \in \mathbb{P}^n_{p_0}$ είναι ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη $\oplus$ του $\mathbb{P}^n_{p_0}$.

Για υπόθεσε $(p_0, x) \in \mathbb{P}^n_{p_0}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}_0, x) \oplus (\mathcal{P}_0, -x) &= (\mathcal{P}_0, x + (-x)) \stackrel{\text{το } -x \text{ σύμμετρο του } x}{=} (\mathcal{P}_0, 0) \stackrel{\text{το } 0 \text{ σύμμετρο του } 0}{=} \\
 &= (\mathcal{P}_0, (-x) + x) \stackrel{\text{το } (-x) \text{ σύμμετρο του } x}{=} (\mathcal{P}_0, -x) \oplus (\mathcal{P}_0, x).
 \end{aligned}$$

Άρα το $(\mathcal{P}_0, -x)$ είναι το σύμμετρο (αντίθετο) του $(\mathcal{P}_0, x)$ ως προς την πράξη $\oplus$ του $\mathcal{P}_0^*$.

Άρα η δομή $(\mathcal{P}_0^*, \oplus)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Έστω $\lambda \in \mathcal{K}$, $(\mathcal{P}_0, x), (\mathcal{P}_0, y) \in \mathcal{P}_0^*$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \lambda \cdot ((\mathcal{P}_0, x) \oplus (\mathcal{P}_0, y)) &\stackrel{\text{ορισμός του } \oplus}{=} \\
 &= \lambda \cdot (\mathcal{P}_0, x+y) \stackrel{\text{ορισμός του αριθμ. πράξης, ιδιότητα στο } \mathcal{K}}{=} \\
 &= (\mathcal{P}_0, \lambda x + \lambda y) \stackrel{\text{ορισμός } \oplus}{=} (\mathcal{P}_0, \lambda x) \oplus (\mathcal{P}_0, \lambda y) \\
 &\stackrel{\text{ορισμός αριθμ. πράξης}}{=} \lambda \cdot (\mathcal{P}_0, x) \oplus \lambda \cdot (\mathcal{P}_0, y), \text{ για κάθε } \lambda \in \mathcal{K} \text{ και}
 \end{aligned}$$

$(\mathcal{P}_0, x), (\mathcal{P}_0, y) \in \mathcal{P}_0^*$.

Έστω $\lambda, \mu \in \mathcal{K}$ και $(\mathcal{P}_0, x) \in \mathcal{P}_0^*$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) \cdot (\mathcal{P}_0, x) &\stackrel{\text{ορισμός αριθμ. πράξης}}{=} (\mathcal{P}_0, (\lambda + \mu)x) \stackrel{\text{ιδιότητα στο } \mathcal{K}}{=} (\mathcal{P}_0, \lambda x + \mu x) \stackrel{\text{ορισμός } \oplus}{=} \\
 &= (\mathcal{P}_0, \lambda x) \oplus (\mathcal{P}_0, \mu x) \stackrel{\text{ορισμός αριθμ. πράξης}}{=} \lambda(\mathcal{P}_0, x) + \mu(\mathcal{P}_0, x)
 \end{aligned}$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathcal{K}$ και $(\mathcal{P}_0, x) \in \mathcal{P}_0^*$.

Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $(p_0, x) \in \mathcal{P}_0^n$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda(\mu \cdot (p_0, x)) &\stackrel{\text{αριθμ. νόμ.}}{=} \lambda \cdot (\mu x) \stackrel{\text{αριθμ. νόμ.}}{=} (\lambda \mu) x \stackrel{\text{αριθμ. νόμ.}}{=} (\lambda \mu) (p_0, x) \\ &= (p_0, (\lambda \mu) x) = (\lambda \mu) (p_0, x), \text{ για κάθε } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ και } (p_0, x) \in \mathcal{P}_0^n. \end{aligned}$$

Ανάλυση για κάθε $(p_0, x) \in \mathcal{P}_0^n$ έχουμε:

$$1. (p_0, x) \stackrel{\text{αριθμ. νόμ.}}{=} (p_0, 1 \cdot x) = (p_0, x), \text{ για κάθε } (p_0, x) \in \mathcal{P}_0^n.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η δομή

$(\mathcal{P}_0^n, \oplus, \cdot)$ είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος.

Θα συμβολίζουμε με $x_{p_0} := (p_0, x)$ για κάθε

$(p_0, x) \in \mathcal{P}_0^n$ για αντιστοίχηση συμβολισμών. και με $\mathbf{1}$ το αλγεβρικό ταυτοτικό στοιχείο στο $\mathcal{P}_0^n$ για αντιστοίχηση συμβολισμών. Έχουμε το εξής:

Η n -άδα $((e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0})$ είναι μια βάση του $\mathcal{P}_0^n$, δηλαδή ο $(\mathcal{P}_0^n, \oplus, \cdot)$ έχει διάσταση n όπου ως γνωστόν $e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ όπου το 1 είναι στην i -οστή θέση και όλα τα άλλα

έχει το 0, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Ας το αποδείξουμε αυτό.

Έστω τυχαίο $x_{p_0} \in \mathbb{R}^n_{p_0}$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$.

Τότε υπάρχουν $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ώστε: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) \\ &= x_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n (0, 0, \dots, 1) = \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (1) \end{aligned}$$

Αρα έχουμε:

$$\begin{aligned} x_{p_0} &= (p_0, x) \stackrel{(1)}{=} (p_0, x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = \\ &= (p_0, x_1 e_1) + (p_0, x_2 e_2) + \dots + (p_0, x_n e_n) = \\ &= x_1 (p_0, e_1) + x_2 (p_0, e_2) + \dots + x_n (p_0, e_n) = \\ &= x_1 (e_1)_{p_0} + x_2 (e_2)_{p_0} + \dots + x_n (e_n)_{p_0}, \quad \text{όπου} \end{aligned} \quad (2)$$

παράλληλα χρησιμοποιούμε την προφανή ιδιότητα:

$$\begin{aligned} &(p_0, u_1) + (p_0, u_2) + \dots + (p_0, u_n) = \\ &= (p_0, u_1 + u_2 + \dots + u_n) \quad (2) \text{ για κάθε } u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n \text{ } \end{aligned}$$

οποία αποδεικνύεται εύκολα επαγωγικά (υπό το ως
αυτή άσκηση), (όπου για $n=2$ είναι ο ορισμός της πρόβλεψης).

Η (2)' γράφεται πιο συνοπτικά ως εξής:

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i) p_0 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) p_0 \quad (3)$$

Η (2) μας λέει ότι η n -άδα

$(e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0}$ είναι βάση

γεννητόρων του $\mathcal{P}_{p_0}^n$.

Έστω τώρα τυχαία $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ έτοιμα:

$$\lambda_1(e_1)_{p_0} + \lambda_2(e_2)_{p_0} + \dots + \lambda_n(e_n)_{p_0} = 0 \quad (4) \text{ όπου}$$

με 0 συμβολίζουμε το μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{P}_{p_0}^n$, δηλαδή το $0_{p_0} = (p_0, 0)$, όπου $0 = (0, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\text{σωρευόμενοι}})$ $\in \mathcal{P}_{p_0}^n$

είναι το 0 του $\mathcal{P}_{p_0}^n$.

Έχουμε τώρα (υπολογίζουμε):

$$\begin{aligned} & \lambda_1(e_1)_{p_0} + \lambda_2(e_2)_{p_0} + \dots + \lambda_n(e_n)_{p_0} = \\ & = \lambda_1 \cdot (p_0, e_1) + \lambda_2(p_0, e_2) + \dots + \lambda_n(p_0, e_n) = \\ & = (p_0, \lambda_1 e_1) + (p_0, \lambda_2 e_2) + \dots + (p_0, \lambda_n e_n) \quad (3) \\ & = (p_0, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right)_{p_0} \quad (5) \end{aligned}$$

122

Από τις (4) και (5) έπεται ότι:

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) p_0 = 0. \text{ Αλλά το } 0 \text{ του } \mathbb{R}^n_{p_0}$$

είναι μοναδικό ορισμένο και είναι το $0 = (p_0, 0)$. Αρα,

$$\text{Ισχύει: } \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0^{(6)} \text{ (το } 0 \text{ του } \mathbb{R}^n) \text{ ή συνεπώς τα}$$

$e_i, i=1, 2, \dots, n$ είναι βέβαι του $\mathbb{R}^n$ προκύπτει από την (6)

ότι: $\lambda_i = 0$ για κάθε $i=1, 2, \dots, n$.

Έτσι η (4) ισχύει μόνο εάν $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

εφόσον που συμπαίει ότι η n -άδα

$(e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0}$ είναι ένα γραμμικά

ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n_{p_0}$ και άρα από τα

παράδειγμα προκύπτει ότι η n -άδα:

$(e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0}$ είναι βέβαι του $\mathbb{R}^n_{p_0}$.

Συμπεραίνουμε ότι για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε πάλι σε
 προηγούμενη πρόταση ότι αν $T \in \mathcal{T}^4(V)$, τότε
 $\text{Alt}(T) \in \mathcal{Z}^4(V)$. Έτσι με αυτό τον τρόπο
 παίρνουμε στο χέρι του $\mathcal{Z}^4(V)$.

Μετά από όλα την προηγούμενη μακρά σειρά
 ορισμών είχαμε μένει ετοιμοί να δώσουμε τον
 αυστηρό ορισμό της διαφορικότητας μορφής.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $n \in \mathbb{N}$ με $n \leq n$, σταθεροποιημένα
 $2 \leq n$, $n \geq 2$
 θεωρούμε σαν σύνολο διευκρινών I το σύνολο

$|R^n$. Για κάθε $p \in |R^n$ θεωρούμε τον
 χώρο $\mathcal{Z}^k(|R^n_p)$ (ή $\mathcal{T}^k(|R^n_p)$ αν $n=1$)

Έτσι θεωρούμε τον ορισμένο χώρο των
 χώρων $\mathcal{Z}^k(|R^n_p)$ για $p \in I = |R^n$.

Από το αλυσίδα-σχέση αναγκαζόμαστε ορίσεται
 το σύνολο $\{ \mathcal{Z}^k(|R^n_p), p \in |R^n \}$ όπου και
 χώρων $\mathcal{Z}^k(|R^n_p)$ για $p \in |R^n$

Από το αξίωμα το ένωσ. ορίζεται
 ως το σύνολο $\bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^u(p)$.

Ω δυνάμει θα συμφορτίσσουμε με:

$$(g: \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^u(p)) \text{ το σύνολο}$$

όλων των συναρτήσεων με κέντρο ορισμού το $\mathbb{R}^n$ και
 κενό τιμών το σύνολο $\bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^u(p)$.

Θεωρούμε τώρα το μαρτεβιανό γινόμενο

$$\prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^u(p), \text{ δυνάμει ε' ορισμού το σύνολο:}$$

$$\prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^u(p) := \left\{ \omega \in \left(g: \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^u(p) \right) \right\},$$

$$\text{όπου } \omega(p) \in \Omega^u(p) \text{ για κάθε } p \in \mathbb{R}^n$$

Επειδή $\Omega^u(p) \neq \emptyset, \forall p \in \mathbb{R}^n$ ένεργι ότι:

⌊

$\prod \Omega^k(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$ από το αλμπέρ για
 $p \in \mathbb{R}^n$
επιλογής.

Ορισμός

Τα στοιχεία του βωλού $\prod \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ τα
 $p \in \mathbb{R}^n$
ονομάζουμε διαφορικές μορφές ή κ-μορφές
και όπως είπαμε τέτοιες βωλές υπάρχουν.
Αν ληδύ για διαφορική μορφή είναι για
βωλότητα $\omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^k(\mathbb{R}^n_p)$ τέτοια
ώστε: $\omega(p) \in \Omega^k(\mathbb{R}^n_p)$ για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

Στη βωλεια θα δώσουμε συγκεκριμένα
παράδειγματα για να γίνει κατανοητός ο ορισμός
των διαφορικών μορφών.

[Σημείωση: Στον παραπάνω ορισμό αντικαθιστάμε τους
 $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ με $\mathbb{R}$ όταν $k=1$, δηλαδή βωλές προηγούμενους
συμβολισμούς τα αφήνουμε όλα τα ίδια εκτός από το Ω^k που
το κάνουμε $\mathbb{R}$ και προκύπτει ο ορισμός των 1-μορφών!]

Παραδείγματα διαφοριών μορφών

Σαν σύμβολο ορίσουμε και 0-μορφές.

Μια 0-μορφή διαφορίας είναι
για διαφορίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

1- Μορφές

Έστω $n \in \mathbb{N}$.

Σταθεροποιούμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τον
εφανόμενο χώρο $(\mathbb{R}_{p_0}^n, \oplus, \cdot)$.

Όπως είχαμε η n -άδα $E_{p_0} = ((e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0})$
είναι βάση του $\mathbb{R}_{p_0}^n$. Θεωρούμε τον δυϊκό χώρο
 $(\mathbb{R}_{p_0}^n)^* = \mathcal{L}'(\mathbb{R}_{p_0}^n)$ του $\mathbb{R}_{p_0}^n$.

Θα συμβολίζουμε $\mu \in E_{p_0}^* = ((e_1)_{p_0}^*, (e_2)_{p_0}^*, \dots, (e_n)_{p_0}^*)$
των δυϊκών βάσεων της E_{p_0} , δηλαδή: για $j=1, 2, \dots, n$, η
 $(e_j)_{p_0}^*: \mathbb{R}_{p_0}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η γραμμική συνάρτηση

η μοναδιαία ορισμένη για την οποία ισχύει:

$$(e_j)_{p_0}^* ((e_i)_{p_0}) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Παρόμοια για κάθε $p \in \mathbb{P}^n$ ορίζουμε την

δύναμη $E_p^* = ((e_1)_p^*, (e_2)_p^*, \dots, (e_n)_p^*)$ της

δύναμης $E_p := ((e_1)_p, (e_2)_p, \dots, (e_n)_p)$ του

$\mathbb{P}^n_p$, όπου: $(e_j)_p^* : \mathbb{P}^n_p \rightarrow \mathbb{P}$

να είναι η μοναδιαία γραμμική συνάρτηση όπου:

$$((e_j)_p^*) ((e_i)_p) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

για $i=1, 2, \dots, n$

Ορίζουμε αν σύνολο των διαφορετικών 1-μορφών

το σύνολο $\prod_{p \in \mathbb{P}^n} \mathcal{T}'(\mathbb{P}^n_p)$ το οποίο είναι

μη κενό από το αξίωμα της επιλογής αφού
 $\mathcal{T}'(\mathbb{P}^n_p) \neq \emptyset, \forall p \in \mathbb{P}^n$

Από τοιόν $\prod_{r \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}'(\mathbb{R}^n_r) \neq \emptyset$ μπορούμε να

θεωρήσουμε μια διαφορίσιμη μορφή $\omega \in \prod_{r \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}'(\mathbb{R}^n_r)$

Τότε η ω είναι μια συνάρτηση

$$\omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{r \in \mathbb{R}^n} \mathcal{I}'(\mathbb{R}^n_r) \text{ , τέτοια ώστε:}$$

$$\omega(r) \in \mathcal{I}'(\mathbb{R}^n_r) \text{ για κάθε } r \in \mathbb{R}^n.$$

Ας σταθεροποιήσουμε ένα $r_0 \in \mathbb{R}^n$. Τότε:

$$\omega(r_0) \in \mathcal{I}'(\mathbb{R}^n_{r_0}) \text{ ε'ε' ορισμ' της } \omega.$$

Από η E_r^* είναι βάση του $\mathcal{I}'(\mathbb{R}^n_{r_0})$, υπάρχουν

$$\text{πραγματικοί αριθμοί } \omega_1(r_0), \omega_2(r_0), \dots, \omega_n(r_0) \in \mathbb{R}$$

που εξαρτώνται από το r_0 ώστε να ισχύει

$$\omega(r_0) = \omega_1(r_0) (e_1)_{r_0}^* + \omega_2(r_0) (e_2)_{r_0}^* + \dots + \omega_n(r_0) (e_n)_{r_0}^*$$

Αυτό βέβαια θα ισχύει για κάθε $r \in \mathbb{R}^n$. Δηλαδή

για κάθε $r \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί

$$\omega_1(r), \omega_2(r), \dots, \omega_n(r) \text{ ώστε να ισχύει:}$$

$\omega(p) = \omega_1(p)(e_1)_p^* + \omega_2(p)(e_2)_p^* + \dots + \omega_n(p)(e_n)_p^*$
Επειδή για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$, ορίζεται μοναδικά το

$\omega(p) \in \mathcal{I}'(\mathbb{R}^n)$, αφού η ω είναι γραμμική
ε) ορίζεται και για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ ορίζονται, για
μοναδικό τρόπο τα $\omega_i(p) \in \mathbb{R}$ για $i=1,2,\dots,n$
έτσι ώστε να ισχύει:

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n \omega_i(p)(e_i)_p^* \quad \text{αφού από διάνυσμα}$$

ενός διανυσματικού χώρου γράφεται ως μοναδικό
πρόσθετο των $\omega_i(p)$ και $(e_i)_p^*$ των

βασικών για $\mathbb{R}^n$.

Έτσι για κάθε $i=1,2,\dots,n$ ορίζονται οι γραμμικές

$$\omega_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{έτσι ώστε να ισχύει:}$$

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n \omega_i(p)(e_i)_p^* \quad \text{για κάθε } p \in \mathbb{R}^n (*)$$

Αλλά και αντίστροφα θα δείξουμε ότι

για οποιαδήποτε επιλεγεί γραμμική $\omega_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

για $i=1,2,\dots,n$ ορίζεται αριθμικά για διαφορετικό 1-ημερολόγιο

τέτοια ώστε να ισχύει η (*).

Έστω λοιπόν οι $\omega_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι

για τυχαία επιλογή της αναμετάθεσης, για $i=1,2,\dots,n$
των οποίων και σταθεροποιούμε.

Δεν είναι απαραίτητο οι ω_i , $i=1,2,\dots,n$ να έχουν
κάποιες ιδιαίτερες ιδιότητες π.χ. να είναι συνεχείς ή
διαφορίσιμες κ.τ.λ.

Έτσι για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται ο 1-ταυτοτής
(γραμμική μορφή) $\sum_{i=1}^n \omega_i(p) (e_i)_p^* \in \mathcal{I}'(\mathbb{R}_p^n)$

Έτσι για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται το μονοσύνολο

$$A_p := \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i(p) (e_i)_p^* \right\}, \text{ για κάθε } p \in \mathbb{R}^n$$

μεταδίδει στοιχείο το $\sum_{i=1}^n \omega_i(p) (e_i)_p^* \in \mathcal{I}'(\mathbb{R}_p^n)$.

Από το αξιωματικό-εξέταση αλληλεπέναντων ορίζεται το
σύνολο $B = \{ A_p, p \in \mathbb{R}^n \}$ με στοιχείο το σύνολο

A_p , για $p \in \mathbb{R}^n$. Από το αξιωματικό και είναι ορίζεται
πάλι το σύνολο $UB = \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} A_p$

Αφού $A_p \neq \emptyset$ για κάθε $p \in \mathbb{H}^n$ έπεται από το
αξίωμα της επιλογής ότι το καρτεσιανό γινόμενο
 $\prod_{p \in \mathbb{H}^n} A_p \neq \emptyset$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το
 $\prod_{p \in \mathbb{H}^n} A_p$ είναι μονοσύνολο. Συμβολίζουμε

με $\omega \in \prod_{p \in \mathbb{H}^n} A_p$ το μοναδικό στοιχείο του
συνόλου $\prod_{p \in \mathbb{H}^n} A_p$. Προφανώς $\omega \in \prod_{p \in \mathbb{H}^n} \mathcal{I}'(\mathbb{R}_p^n)$

από τον ορισμό της και ισχύει ότι:

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n \omega_i(p) (e_i)_p^* \quad \text{για κάθε } p \in \mathbb{H}^n \text{ από}$$

τον ορισμό της ω .
Έτσι όλες οι διαφορίμες 1-μορφές είναι αυτές
αριθμώς που περιγράφονται με τη παραπάνω
διαδικασία.

(132)

Ας δούμε και ένα συνημιμένο παράδειγμα σε διαφορικές 1-μορφές, για $n=3$.

Θεωρούμε το διανυσματικό $\omega_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, για $i=1,2,3$,
 με $\omega_1((x,y,z)) = xyz$, $\omega_2((x,y,z)) = x^2yz$,
 $\omega_3((x,y,z)) = xy^2z$.

Επί ορίζεται η διαφορική 1-μορφή

$$\omega: \mathbb{R}^3 \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^3} \mathcal{F}'(\mathbb{R}_p^3) \quad \forall p$$

$$\omega(p) = \omega_1(p)(e_1^*)_p + \omega_2(p)(e_2^*)_p + \omega_3(p)(e_3^*)_p$$

για κάθε $p \in \mathbb{R}^3$ η e_i^* είναι διάνυσμα

$$\omega((x,y,z)) = xyz(e_1^*)_{(x,y,z)} + x^2yz(e_2^*)_{(x,y,z)} + xy^2z(e_3^*)_{(x,y,z)} \quad \text{για κάθε } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(133)

Διαφορίες 2-μορφές στον $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$

α) Διαφορίες 2-μορφές στον $\mathbb{R}^2$.

Έστω $\omega \in \Pi \Omega^2(\mathbb{R}^2)$.
 $p \in \mathbb{R}^2$

Στη θεωρούμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^2$. Έτσι $\omega(p_0) \in \Omega^2(\mathbb{R}_{p_0}^2)$

Από γνωστό θεώρημα ο διανυσματικός χώρος

$\Omega^2(\mathbb{R}_{p_0}^2)$ έχει διάσταση $\binom{2}{2} = \frac{2!}{2! \cdot (2-2)!} =$

$\frac{2!}{2! \cdot 0!} = \frac{2}{2!} = 1$. Έστω $E_{p_0} = ((e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0})$

η βάση του $\mathbb{R}_{p_0}^2$ και

$E_{p_0}^* = ((e_1)_{p_0}^*, (e_2)_{p_0}^*)$ η δυική της βάση.

Τότε από την σχέση 114 το σύνολο

$(T_2^2)^* = \{ (i_1, i_2) \in T_2^2 \mid i_1 < i_2 \} = \{ (1, 2) \}$

και άρα το σύνολο $\{ (e_1)_{p_0}^* \wedge (e_2)_{p_0}^* \}$

είναι βάση του $\Omega^2(\mathbb{R}_{p_0}^2)$, από το θεώρημα 14.

(134)

Αρα υπάρχει $\omega_1(p_0) \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\omega(p_0) = \omega_1(p_0) \cdot ((e_1)^*_{p_0} \wedge (e_2)^*_{p_0})$$

Αφού αυτό συμβαίνει για το τυχόν επιλεγμένο $p_0 \in \mathbb{R}^2$, έπεται ότι για κάθε $p \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $\omega_1(p) \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\omega(p) = \omega_1(p) \cdot ((e_1)^*_p \wedge (e_2)^*_p)$$

Αντίστροφα μπορούμε να δείξουμε ότι εάν επιλέξουμε τυχόντα βωόρτυπο $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

(όχι απαραίτητα συνεχές διαφορίσιμης), τότε όπως στην περίπτωση των 1-διαφορίσιμων μορφών αποδεικνύεται ότι υπάρχει μία διαφορίσιμη 2-μορφή

$$\eta \in \prod_{p \in \mathbb{R}^2} \Omega^2(\mathbb{R}_p) \quad \text{για την οποία ισχύει:}$$

$$\eta(p) = f(p) \cdot ((e_1)^*_p \wedge (e_2)^*_p) \quad \text{για}$$

$$\text{κάθε } p \in \mathbb{R}^2, \text{ όπου } \eta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^2} \Omega^2(\mathbb{R}_p)$$

(135)

As κάνουμε μια άσκηση για να δίνουν
ματάνουξες οι παραπάνω έννοιες

Άσκηση 1 (Βασική εφαρμογή) ← πρότυπο

Θεωρούμε την διαφορική 2-μορφή

$$\omega \in \Pi \Omega^2(\mathbb{R}^2) \text{ η οποία ορίζεται με τον } p \in \mathbb{R}^2$$

τόσο:

$$\omega((x, y)) = xy \cdot ((e_1^*)_{(x, y)} \wedge (e_2^*)_{(x, y)})$$

$$\text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\text{Θέτουμε } p_0 = (1, 2), \quad u'_0 = (3, 4), \quad u''_0 = (5, 6)$$

Να υπολογιστεί ο αριθμός

$$\omega(p_0)((u'_0)_{p_0}, (u''_0)_{p_0})$$

Πύξυ

$$\text{Για κάθε } p \in \mathbb{R}^2 \text{ η } \omega(p) : (\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

έτσι έχει νόημα να υπολογίσουμε τον αριθμό:

$$\omega(p)((u'_0)_p, (u''_0)_p)$$

(136)

Εξ' ορισμού έχουμε

$$\begin{aligned}\omega(p) &= \omega((1,2)) = 1 \cdot 2 \cdot ((e_1^*)_{(1,2)} \wedge (e_2^*)_{(1,2)}) \\ &= 2 \cdot ((e_1^*)_p \wedge (e_2^*)_p) \quad (1) \quad , \text{ για } p=(1,2).\end{aligned}$$

Θεωρώμε τυχόν $p_0 \in \mathbb{R}^2$ σταθεροποιημένο

και τυχόν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ σταθερά $w' = (\lambda_1, \lambda_2)$ και

$w^2 = (\mu_1, \mu_2)$ στοιχεία του $\mathbb{R}^2$ για κάποια

$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, σταθεροποιημένα.

Θα υπολογίσουμε τον αριθμό:

$$((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0})((w')_{p_0}, (w^2)_{p_0}).$$

Εξ' ορισμού τα $(e_1^*)_{p_0}, (e_2^*)_{p_0}$ είναι

1-ταυστές. Έτσι εξ' ορισμού του εσωτερικού γινομένου

δύο 1-ταυστών έχουμε:

$$\begin{aligned}(e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0} &= \frac{(1+1)!}{1! \cdot 1!} \cdot \text{Alt}((e_1^*)_{p_0} \otimes (e_2^*)_{p_0}) \\ &= 2 \text{Alt}((e_1^*)_{p_0} \otimes (e_2^*)_{p_0}) \quad (1)\end{aligned}$$

(137)

Θέτουμε $\varphi_1 := (e_1^*) \varphi_0$, $\varphi_2 := (e_2^*) \varphi_0$,

$\psi_1 := (w^1) \varphi_0$, $\psi_2 := (w^2) \varphi_0$ για αντιστοίχως
συμβολισμούς.

Έχουμε τώρα e_i^* ορίσματα:

$$(\text{Alt}((e_1^*) \varphi_0 \otimes (e_2^*) \varphi_0))((w^1) \varphi_0, (w^2) \varphi_0)$$

$$= \text{Alt}(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\psi_1, \psi_2) =$$

$$= \frac{1}{2!} \cdot \sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn} \sigma \cdot (\varphi_1 \otimes \varphi_2)((\psi_{\sigma(1)}, \psi_{\sigma(2)})) \quad (2)$$

Έχουμε ότι: $S_2 = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, όπου $\sigma_1 = \text{id}_2$ ή

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ και } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ως γνωστόν, και}$$

$$\text{sgn} \sigma_1 = 1 \text{ και } \text{sgn} \sigma_2 = -1 \quad (3)$$

Έχουμε τώρα:

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)((\psi_{\sigma(1)}, \psi_{\sigma(2)})) = \varphi_1(\psi_{\sigma(1)}) \cdot \varphi_2(\psi_{\sigma(2)}) \quad (4)$$

από τον ορισμό του διανυσματικού $\varphi_1 \otimes \varphi_2$

(138)

Έχουμε τώρα: από τον ορισμό των πράξεων στον $\mathbb{R}_{\mathcal{P}_0}^2$

$$\begin{aligned} u_1 &= (w')_{\mathcal{P}_0} = (\mathcal{P}_0, w') = (\mathcal{P}_0, (\lambda_1, \lambda_2)) = \\ &= (\mathcal{P}_0, (\lambda_1, 0)) + (\mathcal{P}_0, (0, \lambda_2)) = (\mathcal{P}_0, \lambda_1(1, 0)) + (\mathcal{P}_0, \lambda_2(0, 1)) \\ &= (\mathcal{P}_0, \lambda_1 e_1) + (\mathcal{P}_0, \lambda_2 e_2) = \lambda_1 (\mathcal{P}_0, e_1) + \lambda_2 (\mathcal{P}_0, e_2) \\ &= \lambda_1 (e_1)_{\mathcal{P}_0} + \lambda_2 (e_2)_{\mathcal{P}_0} \quad (5) \end{aligned}$$

Παρόμοια έχουμε:

$$\begin{aligned} u_2 &= (w'')_{\mathcal{P}_0} = (\mathcal{P}_0, (\mu_1, \mu_2)) = (\mathcal{P}_0, (\mu_1, 0)) + (\mathcal{P}_0, (0, \mu_2)) \\ &= (\mathcal{P}_0, \mu_1(1, 0)) + (\mathcal{P}_0, \mu_2(0, 1)) = (\mathcal{P}_0, \mu_1 e_1) + (\mathcal{P}_0, \mu_2 e_2) \\ &= \mu_1 (\mathcal{P}_0, e_1) + \mu_2 (\mathcal{P}_0, e_2) = \mu_1 (e_1)_{\mathcal{P}_0} + \mu_2 (e_2)_{\mathcal{P}_0} \quad (6) \end{aligned}$$

Επειδή οι e_1, e_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες στον $\mathbb{R}_{\mathcal{P}_0}^2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \varphi_1(u_1) &= \varphi_1(\lambda_1 (e_1)_{\mathcal{P}_0} + \lambda_2 (e_2)_{\mathcal{P}_0}) = \\ &= \varphi_1(\lambda_1 (e_1)_{\mathcal{P}_0}) + \varphi_1(\lambda_2 (e_2)_{\mathcal{P}_0}) = \\ &= \lambda_1 \varphi_1((e_1)_{\mathcal{P}_0}) + \lambda_2 \varphi_1((e_2)_{\mathcal{P}_0}) = \\ &= \lambda_1 ((e_1^*)_{\mathcal{P}_0})((e_1)_{\mathcal{P}_0}) + \lambda_2 ((e_1^*)_{\mathcal{P}_0})((e_2)_{\mathcal{P}_0}) = \\ &= \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 = \lambda_1, \text{ αφού η } ((e_1^*)_{\mathcal{P}_0}, (e_2^*)_{\mathcal{P}_0}) \text{ είναι η} \\ &\text{δυσκή βάση των } ((e_1)_{\mathcal{P}_0}, (e_2)_{\mathcal{P}_0}) \quad (7) \end{aligned}$$

(139)

Ανάλυση έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(u_2) &= \varphi_1(\mu_1(e_1)_{\mathcal{P}_0} + \mu_2(e_2)_{\mathcal{P}_0}) = \\
 &= \varphi_1(\mu_1(e_1)_{\mathcal{P}_0}) + \varphi_1(\mu_2(e_2)_{\mathcal{P}_0}) = \\
 &= \mu_1 \varphi_1((e_1)_{\mathcal{P}_0}) + \mu_2 \varphi_1((e_2)_{\mathcal{P}_0}) = \\
 &= \mu_1 \cdot ((e_1^*)_{\mathcal{P}_0})((e_1)_{\mathcal{P}_0}) + \mu_2 \cdot ((e_1^*)_{\mathcal{P}_0})((e_2)_{\mathcal{P}_0}) = \\
 &= \mu_1 \cdot 1 + \mu_2 \cdot 0 = \mu_1, \text{ αφού από την } ((e_1^*)_{\mathcal{P}_0}, (e_2^*)_{\mathcal{P}_0}) \\
 &\text{ είναι η δυνάμει βάση των } ((e_1)_{\mathcal{P}_0}, (e_2)_{\mathcal{P}_0})(\mathcal{P}).
 \end{aligned}$$

Ανάλυση έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(u_1) &= \varphi_2(\lambda_1(e_1)_{\mathcal{P}_0} + \lambda_2(e_2)_{\mathcal{P}_0}) = \\
 &= \varphi_2(\lambda_1(e_1)_{\mathcal{P}_0}) + \varphi_2(\lambda_2(e_2)_{\mathcal{P}_0}) = \\
 &= \lambda_1 \varphi_2((e_1)_{\mathcal{P}_0}) + \lambda_2 \varphi_2((e_2)_{\mathcal{P}_0}) = \\
 &= \lambda_1 \cdot ((e_2^*)_{\mathcal{P}_0})((e_1)_{\mathcal{P}_0}) + \lambda_2 \cdot ((e_2^*)_{\mathcal{P}_0})((e_2)_{\mathcal{P}_0}) \\
 &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{9}{5}\right) \cdot \lambda_2
 \end{aligned}$$

Ανάλυση έχουμε:

(140)

$$\begin{aligned}\varphi_2(u_2) &= \varphi_2(\mu_1(e_1)p_0 + \mu_2(e_2)p_0) = \\ &= \varphi_2(\mu_1(e_1)p_0) + \varphi_2(\mu_2(e_2)p_0) = \\ &= \mu_1 \varphi_2((e_1)p_0) + \mu_2 \varphi_2((e_2)p_0) = \\ &= \mu_1 \cdot ((e_2^*)p_0)((e_1)p_0) + \mu_2((e_2^*)p_0)((e_2)p_0) = \\ &= \mu_1 \cdot 0 + \mu_2 \cdot 1 = \mu_2 \quad (10)\end{aligned}$$

Այս ֆորմուլաներում $\mu \in \sigma_1$ օգտագործվում է:

$$\varphi_1(u_1) = \lambda_1, \quad \varphi_1(u_2) = \mu_1, \quad \varphi_2(u_1) = \lambda_2, \quad \varphi_2(u_2) = \mu_2 \quad (11)$$

Այսպիսով օգտագործվում են (11) ճշմարտության (4) պայմանները:

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \otimes \varphi_2)((u_{G(1)}, u_{G(2)})) &= (\varphi_1 \otimes \varphi_2)((u_1, u_2)) = \\ &= \varphi_1(u_1) \cdot \varphi_2(u_2) = \lambda_1 \mu_2 \quad (12) \text{ պայման,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \otimes \varphi_2)((u_{G_2(1)}, u_{G_2(2)})) &= (\varphi_1 \otimes \varphi_2)((u_2, u_1)) = \\ &= \varphi_1(u_2) \cdot \varphi_2(u_1) = \mu_1 \lambda_2 \quad (13)\end{aligned}$$

Այսպիսով օգտագործվում են (12) պայման (13) ճշմարտության (2) պայմանները:

$$\frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn } \sigma (\varphi_1 \otimes \varphi_2)((u_{G(1)}, u_{G(2)})) =$$

(141)

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\text{sgn } G_1 \cdot (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \left((u_{G_1(1)}, u_{G_1(2)}) \right) + \right. \\ \left. + \text{sgn } G_2 \cdot (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \left((u_{G_2(1)}, u_{G_2(2)}) \right) \right) = \\ = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \left((u_1, u_2) \right) - (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \left((u_2, u_1) \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2) \quad (14)$$

Αντίστοιχα από την (14) στην (2) έχουμε:

$$\left(\text{Alt} \left((e_1^*)_{p_0} \otimes (e_2^*)_{p_0} \right) \right) \left((w^1)_{p_0}, (w^2)_{p_0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2) \quad (15)$$

Από την (1) και (15) έχουμε τώρα:

$$\left((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0} \right) \left((w^1)_{p_0}, (w^2)_{p_0} \right) =$$

$$= \left(2 \text{ Alt} \left((e_1^*)_{p_0} \otimes (e_2^*)_{p_0} \right) \right) \left((w^1)_{p_0}, (w^2)_{p_0} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2) = \lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2 \quad (16)$$

Επίσης τώρα έχουμε ότι $w^1 = u^1 = (3, 4) = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\delta w_1 \delta w_2$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$ και $w^2 = u^2 = (5, 6) = (\mu_1, \mu_2)$, $\delta w_1 \delta w_2$

$\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 6$, έχουμε από την (16) ότι: $\delta w_1 \delta w_2 = (12)$

(142)

$$\omega(p_0) \left(((u^1)_{p_0}, (u^2)_{p_0}) \right) =$$

$$= 2 \left((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0} \right) \left(((u^1)_{p_0}, (u^2)_{p_0}) \right) =$$

$$= 2 \cdot (3 \cdot 6 - 5 \cdot 4) = 2 \cdot (18 - 20) = 2 \cdot (-2) = -4.$$

8) Διαφορίκεις 2-μορφές στον $\mathbb{R}^3$.

$$\text{Έστω } \omega \in \prod_{p \in \mathbb{R}^3} \Omega^2(\mathbb{R}_p^3)$$

Συμπερασιολογούμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^3$.

$$\text{Έστω } \omega(p_0) \in \Omega^2(\mathbb{R}_{p_0}^3).$$

Ο χώρος $\Omega^2(\mathbb{R}_{p_0}^3)$ έχει διάσταση

$$\frac{3!}{2! (3-2)!} = 3, \text{ από το Θεώρημα 14 στο βιβλίο 114.}$$

(143)

Εξω $E_{p_0} = ((e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, (e_3)_{p_0})$ να είναι βάση του $\mathbb{R}_{p_0}^3$ και

$E_{p_0}^* = ((e_1^*)_{p_0}, (e_2^*)_{p_0}, (e_3^*)_{p_0})$ να είναι διάνυσμα βάση της E_{p_0} .

Τότε από τη σχέση 1.14 το σύνολο

$$(T_3^2)^* = \{ (i_1, i_2) \in T_3^2 \mid i_1 < i_2 \} = \\ = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3) \}.$$

Είναι το σύνολο:

$$A = \{ (e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0}, (e_1^*)_{p_0} \wedge (e_3^*)_{p_0}, \\ (e_2^*)_{p_0} \wedge (e_3^*)_{p_0} \}$$

αποτελεί βάση του

$$\Omega^2(\mathbb{R}_{p_0}^3). \text{ Από } \omega(p_0) \in \Omega^2(\mathbb{R}_{p_0}^3)$$

υπάρχουν αριθμοί $\omega_1(p_0), \omega_2(p_0), \omega_3(p_0) \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\omega(p_0) = \omega_1(p_0) ((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0}) \\ + \omega_2(p_0) ((e_2^*)_{p_0} \wedge (e_3^*)_{p_0}) + \\ + \omega_3(p_0) ((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_3^*)_{p_0})$$

Παρόμοια για κάθε $p \in \mathbb{R}^3$ υπάρχει
 ηράδυνατοι αριθμοί $\omega_1(p), \omega_2(p), \omega_3(p)$ ώστε

$$\begin{aligned} \omega(p) = & \omega_1(p) \cdot ((e_1^*)_p \wedge (e_2^*)_p) \\ & + \omega_2(p) \cdot ((e_2^*)_p \wedge (e_3^*)_p) + \\ & + \omega_3(p) \cdot ((e_1^*)_p \wedge (e_3^*)_p). \end{aligned}$$

Αντίστροφα θεωρούμε τυχαίες συναρτήσεις

$$\omega_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ για } i=1,2,3 \text{ και τις}$$

ενα θεωρούμε (όχι απαραίτητα συνεχείς ή
 διαφορίσιμες). Τότε ορίζεται μοναδική η

$$\text{διαφορική 2-μορφή } \omega \in \bigcap_{p \in \mathbb{R}^3} \Omega^2(\mathbb{R}^3_p) \text{ για}$$

τη οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} \omega(p) = & \omega_1(p) \cdot ((e_1^*)_p \wedge (e_2^*)_p) + \\ & + \omega_2(p) \cdot ((e_2^*)_p \wedge (e_3^*)_p) + \\ & + \omega_3(p) \cdot ((e_1^*)_p \wedge (e_3^*)_p) \text{ για κάθε } p \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Η (*) αποδεικνύεται παρόμοια όπως για 1-διαφορικές
 μορφές.

Άσκηση 2

Θεωρούμε την διαφορική - 2-μορφή στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως εξής:

$$\omega: \mathbb{R}^3 \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^3} \Omega^2(\mathbb{R}_p^3) \quad \mu \in$$

$$\begin{aligned} \omega(x, y, z) = & x^2 \cdot ((e_1)^*_{(x,y,z)} \wedge (e_2)^*_{(x,y,z)}) \\ & + y^2 \cdot ((e_2)^*_{(x,y,z)} \wedge (e_3)^*_{(x,y,z)}) + \\ & + z^2 \cdot ((e_1)^*_{(x,y,z)} \wedge (e_3)^*_{(x,y,z)}) \end{aligned}$$

για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Θέτουμε $p_0 := (1, 2, 3)$,

$$u^1 := (2, 3, 4), \quad u^2 := (3, 4, 5).$$

Να υπολογιστεί ο αριθμός:

$$(\omega(p_0))((u^1)_{p_0}, (u^2)_{p_0})$$

Πύλη

Θέτουμε $p_0 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $u^1 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$,

$u^2 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$.

Σταθεροποιούμε $i_0, j_0 \in \{1, 2, 3\}$ με $i_0 < j_0$.

Υπολογίζουμε τώρα το:

$$\left((e_{i_0}^*)_{p_0} \wedge (e_{j_0}^*)_{p_0} \right) \left(((u^1)_{p_0}, (u^2)_{p_0}) \right).$$

Οι $(e_{i_0}^*)_{p_0}, (e_{j_0}^*)_{p_0}$ είναι 1-ταυστές.

Εξ' ορισμού του εξωτερικού γινομένου έχουμε:

$$\begin{aligned} (e_{i_0}^*)_{p_0} \wedge (e_{j_0}^*)_{p_0} &= \frac{(1+1)!}{1! \cdot 1!} \text{Alt} \left((e_{i_0}^*)_{p_0} \otimes (e_{j_0}^*)_{p_0} \right) \\ &= 2 \text{Alt} \left((e_{i_0}^*)_{p_0} \otimes (e_{j_0}^*)_{p_0} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Από τον ορισμό του ανάστροφου ταυστές Alt παίρνουμε:

$$\text{Alt} \left((e_{i_0}^*)_{p_0} \otimes (e_{j_0}^*)_{p_0} \right) = \frac{1}{2} \left((e_{i_0}^*)_{p_0} \otimes (e_{j_0}^*)_{p_0} - (e_{j_0}^*)_{p_0} \otimes (e_{i_0}^*)_{p_0} \right)$$

Θέτουμε $\varphi_1 := (e_{i_0}^*)_{p_0}, \varphi_2 := (e_{j_0}^*)_{p_0}, v_1 = (u^1)_{p_0},$

$v_2 = (u^2)_{p_0}$

(147)

$$\begin{aligned} & \left(\text{Alt} \left((e_{i_0}^*)_{p_0} \otimes (e_{j_0}^*)_{p_0} \right) \right) \left((u^1)_{p_0}, (u^2)_{p_0} \right) = \\ & = \text{Alt} (\varphi_1 \otimes \varphi_2) (v_1, v_2) = \\ & = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn } \sigma \left(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \right) \left(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)} \right) = \\ & = \frac{1}{2!} \left(\text{sgn } \sigma_1 \left(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \right) \left(v_{\sigma_1(1)}, v_{\sigma_1(2)} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \text{sgn } \sigma_2 \left(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \right) \left(v_{\sigma_2(1)}, v_{\sigma_2(2)} \right) \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left(1 \cdot \left(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \right) (v_1, v_2) - 1 \cdot \left(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \right) (v_2, v_1) \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left(\varphi_1(v_1) \varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2) \varphi_2(v_1) \right) = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \left((e_{i_0}^*)_{p_0} \left((u^1)_{p_0} \right) \cdot (e_{j_0}^*)_{p_0} \left((u^2)_{p_0} \right) \right. \\ & \quad \left. - (e_{i_0}^*)_{p_0} \left((u^2)_{p_0} \right) \cdot (e_{j_0}^*)_{p_0} \left((u^1)_{p_0} \right) \right) / 2. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα:

$$\left((e_{i_0}^*)_{\mathcal{P}_0} \right) \left((u')_{\mathcal{P}_0} \right) = \left((e_{i_0}^*)_{\mathcal{P}_0} \right) \left((\mathcal{P}_0, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)) \right) \quad (3)$$

Από την ιδιότητα (3) που προκύπτει παρατηρούμε
 από τον ορισμό της πρόσθεσης στον χώρο $\mathcal{P}_0^3$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (\lambda_1, 0, 0)_{\mathcal{P}_0} + (0, \lambda_2, 0)_{\mathcal{P}_0} + (0, 0, \lambda_3)_{\mathcal{P}_0} &= \\ &= ((\lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0) + (0, 0, \lambda_3))_{\mathcal{P}_0} = \\ &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_{\mathcal{P}_0} = ((\mathcal{P}_0, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3))) \quad (4) \end{aligned}$$

Ανάλυση έχουμε:

$$\begin{aligned} (\lambda_1, 0, 0)_{\mathcal{P}_0} &= ((\mathcal{P}_0, (\lambda_1, 0, 0))) = ((\mathcal{P}_0, \lambda_1(1, 0, 0))) \\ &= ((\mathcal{P}_0, \lambda_1 e_1)) = \lambda_1((\mathcal{P}_0, e_1)) = \lambda_1(e_1)_{\mathcal{P}_0} \quad (5) \\ (0, \lambda_2, 0)_{\mathcal{P}_0} &= ((\mathcal{P}_0, (0, \lambda_2, 0))) = ((\mathcal{P}_0, \lambda_2(0, 1, 0))) \\ &= ((\mathcal{P}_0, \lambda_2 e_2)) = \lambda_2((\mathcal{P}_0, e_2)) = \lambda_2(e_2)_{\mathcal{P}_0} \quad (6) \end{aligned}$$

(149)

$$\begin{aligned} (0, 0, \lambda_3)_{p_0} &= (p_0, (0, 0, \lambda_3)) = \\ &= (p_0, \lambda_3(0, 0, 1)) = (p_0, \lambda_3 e_3) = \\ &= \lambda_3 (p_0, e_3) = \lambda_3 (e_3)_{p_0} \quad (\text{7}) \end{aligned}$$

Այդ պատճառով ցանցում (5) , (6) և (7) նշանակումներով:

$$(p_0, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)) = \lambda_1 (e_1)_{p_0} + \lambda_2 (e_2)_{p_0} + \lambda_3 (e_3)_{p_0} \quad (8)$$

Այդպիսով ցանցում (8) նշանակումներով (3) և (4) նշանակումներով $(e_{i_0}^*)_{p_0}$ լինում չորսիցիսկում և ճշգրիտում (3) և (4) նշանակումներով $\{(e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, (e_3)_{p_0}\}$ նշանակումներով:

$$\begin{aligned} (e_{i_0}^*)_{p_0}((p_0, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3))) &= \\ &= ((e_{i_0}^*)_{p_0}) (\lambda_1 (e_1)_{p_0} + \lambda_2 (e_2)_{p_0} + \lambda_3 (e_3)_{p_0}) \\ &= ((e_{i_0}^*)_{p_0}) (\lambda_1 (e_1)_{p_0}) + ((e_{i_0}^*)_{p_0}) (\lambda_2 (e_2)_{p_0}) \\ &\quad + ((e_{i_0}^*)_{p_0}) (\lambda_3 (e_3)_{p_0}) = \end{aligned}$$

(150)

$$\begin{aligned}
 &= \lambda_1 ((e_{i_0}^*)_{p_0}) ((e_1)_{p_0}) + \cancel{\lambda_2 ((e_{i_0}^*)_{p_0}) ((e_2)_{p_0})} \\
 &\quad + \lambda_3 ((e_{i_0}^*)_{p_0}) ((e_3)_{p_0}) = \\
 &= \lambda_{i_0} ((e_{i_0}^*)_{p_0}) ((e_{i_0})_{p_0}) = \lambda_{i_0} (9)
 \end{aligned}$$

Επίσης αντιστρέφοντας από την (9) στην (3) παίρνουμε:

$$((e_{i_0}^*)_{p_0}) ((u')_{p_0}) = \lambda_{i_0} (10).$$

Διαιρώντας από την (10) βρίσκουμε τον // γινόμενο // ότι
 το $((e_{i_0}^*)_{p_0}) ((u')_{p_0})$ είναι η i_0 -συντεταγμένη
 του διανύσματος u' .

Εφαρμόζοντας αυτόν τον γινόμενο βρίσκουμε ανάλογα ότι:

$$((e_{j_0}^*)_{p_0}) ((u^2)_{p_0}) = \mu_{j_0} (11)$$

$$((e_{i_0}^*)_{p_0}) ((u^3)_{p_0}) = \mu_{i_0} (12) \text{ για } i_0 \neq j_0$$

$$((e_{j_0}^*)_{p_0}) ((u^1)_{p_0}) = \lambda_{j_0} (13)$$

(151)

Αντικαθιστώντας στο 74 (10), (11), (12) και (13) στην (2) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & \left(\text{Alt} \left((e_{i_0}^*)_{p_0} \otimes (e_{j_0}^*)_{p_0} \right) \left(((u')_{p_0}, (u'')_{p_0}) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\lambda_{i_0} \cdot \mu_{j_0} - \mu_{i_0} \cdot \lambda_{j_0} \right) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} \lambda_{i_0} & \lambda_{j_0} \\ \mu_{i_0} & \mu_{j_0} \end{pmatrix} \quad (14) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στο 74 (14) στην (1) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & \left((e_{i_0}^*)_{p_0} \wedge (e_{j_0}^*)_{p_0} \right) \left(((u')_{p_0}, (u'')_{p_0}) \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda_{i_0} & \lambda_{j_0} \\ \mu_{i_0} & \mu_{j_0} \end{pmatrix} \quad (15) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την (15) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} & \left((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0} \right) \left(((u')_{p_0}, (u'')_{p_0}) \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_3^*)_{p_0} \right) \left(((u')_{p_0}, (u'')_{p_0}) \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{pmatrix} \quad (17) \end{aligned}$$

159

$$\left((e_2^*)_{p_0} \wedge (e_3^*)_{p_0} \right) \left(((u^1)_{p_0}, (u^2)_{p_0}) \right) = \\ = \det \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} (18)$$

Onòte sia $u^1 = (2, 3, 4)$, $u^2 = (3, 4, 5)$,
ano $\pi_1(16)$, (17) ya (18) na, pvo $\forall \epsilon$:

$$\left((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0} \right) \left(((u^1)_{p_0}, (u^2)_{p_0}) \right) = \\ = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1 \quad (19)$$

$$\left((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_3^*)_{p_0} \right) \left(((u^1)_{p_0}, (u^2)_{p_0}) \right) = \\ = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2 \quad (20)$$

$$\left((e_2^*)_{p_0} \wedge (e_3^*)_{p_0} \right) \left(((u^1)_{p_0}, (u^2)_{p_0}) \right) = \\ = \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 4 = 15 - 16 = -1 \quad (21)$$

Διαφορίτες 3-μορφές στον $\mathbb{R}^3$

Έστω $\omega \in \Pi \Omega^3(\mathbb{R}^3)$
 $p \in \mathbb{R}^3$

Σταθεροποιούμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Έτσι $\omega(p_0) \in \Omega^3(\mathbb{R}^3_{p_0})$.

Από γνωστό θεώρημα ο διανυσματικός χώρος

$\Omega^3(\mathbb{R}^3_{p_0})$ έχει διάσταση $\binom{3}{3} = \frac{3!}{3! \cdot (3-3)!} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$.

Έστω $E_{p_0} = ((e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, (e_3)_{p_0})$ να είναι η

βάση του $\mathbb{R}^3_{p_0}$ και $E^*_{p_0} = ((e_1^*)_{p_0}, (e_2^*)_{p_0}, (e_3^*)_{p_0})$
 να είναι η δυική της βάση της E_{p_0} .

Τώρα το σύνολο

$$(T^3_3)^* := \{ (i_1, i_2, i_3) \in T^3_3 \mid i_1 < i_2 < i_3 \} = \{ (1, 2, 3) \}.$$

Αρα το σύνολο $\{ (e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0} \wedge (e_3^*)_{p_0} \}$

από τελευτ βάση του $\Omega^3(\mathbb{R}^3_{p_0})$.

Αρα, αφού $\omega(p_0) \in \Omega^3(\mathbb{R}^3_{p_0})$ υπάρχει $\omega_1(p_0) \in \mathbb{R} :$

$$\omega(p_0) = \omega_1(p_0) \cdot ((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0} \wedge (e_3^*)_{p_0})$$

(154)

Αυτό που έχουμε ότι για κάθε $p \in \mathbb{R}^3$ υπάρχει $\omega_1(p) \in \mathbb{R}$ μοναδικό ώστε να ισχύει:

$$\omega(p) = \omega_1(p) \cdot ((e_1)^* \wedge (e_2)^* \wedge (e_3)^*)_{\mathbb{R}} (*)$$

Έτσι από την ω ορίζεται μία συνάρτηση $\omega_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\omega(*)$ παραπάνω, για κάθε $p \in \mathbb{R}^3$.

Αλλά και αντίστροφα, για κάθε συνάρτηση $\omega_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται μία διαφοριική -3-μορφή στον $\mathbb{R}^3$ ώστε να ισχύει $\omega(*)$ για κάθε $p \in \mathbb{R}^3$.

Για τον υπολογισμό των τιμών διαφορικών -3-μορφών στον $\mathbb{R}^3$ θα μας βοηθήσει η παρακάτω πρόταση

Πρόταση

Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος, διάστασης $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Έστω $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ να είναι μία διατεταγμένη βάση του V και έστω $S \in \mathcal{L}^n(V)$.

Έστω $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ για $i, j \in T_n = \{1, 2, \dots, n\}$ και τα διανύσματα $w_i := \sum_{j=1}^n a_{i,j} u_j$ του V για $i=1, 2, \dots, n$.

Τότε ισχύει:

$$S((w_1, w_2, \dots, w_n)) = \det(a_{i,j}) \cdot S((u_1, u_2, \dots, u_n)).$$

Απόδειξη

(ευτός ύλης)

Ορίσουμε την συνάρτηση

$$h: (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με τονό:}$$

$$h((x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}), \dots, (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn})) \\ = S \left(\left(\sum_{j=1}^n x_{1j} u_j, \sum_{j=1}^n x_{2j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^n x_{nj} u_j \right) \right)$$

για κάθε $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, όπου

$$v_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \quad \text{για κάθε } i=1, 2, \dots, n$$

Δείχνουμε αρχικά ότι η h είναι ένας n -γραμμικός.

Έστω $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ και $v_i' \in \mathbb{R}^n$, όπου:

$$v_i := (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \quad \text{για } i=1, 2, \dots, n \quad \text{με}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R} \quad \text{για κάθε } (i, j) \in T_n^2.$$

Έστω ότι $v_i' = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in})$ με $y_{ij} \in \mathbb{R}$ για
κάθε $j=1, 2, \dots, n$.

Exemple:

$$\begin{aligned}
 & n((v_1 + v_1', v_2, \dots, v_n)) = \\
 & = n((x_{11} + y_{11}, x_{12} + y_{12}, \dots, x_{1n} + y_{1n}), v_2, \dots, v_n)) = \\
 & = S\left(\left(\sum_{j=1}^n (x_{1j} + y_{1j}) u_j, \sum_{j=1}^n x_{2j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^n x_{nj} u_j\right)\right) \\
 & = S\left(\left(\sum_{j=1}^n (x_{1j} u_j + y_{1j} u_j), \sum_{j=1}^n x_{2j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^n x_{nj} u_j\right)\right) = \\
 & = S\left(\left(\sum_{j=1}^n x_{1j} u_j + \sum_{j=1}^n y_{1j} u_j, \sum_{j=1}^n x_{2j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^n x_{nj} u_j\right)\right) \\
 & = S\left(\sum_{j=1}^n x_{1j} u_j, \sum_{j=1}^n x_{2j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^n x_{nj} u_j\right) \\
 & \quad + S\left(\sum_{j=1}^n y_{1j} u_j, \sum_{j=1}^n x_{2j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^n x_{nj} u_j\right) \\
 & = n((v_1, v_2, \dots, v_n)) + n((v_1', v_2, \dots, v_n)) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Παρόμοια η (1) αποδεικνύεται για κάθε δείκτη i από 1 έως n στο δείγμα.

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} n((\lambda v_1, v_2, \dots, v_n)) &= \\ &= S\left(\left(\sum_{j=1}^n (\lambda x_{1j}) u_j, \sum_{j=1}^n x_{2j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^n x_{nj} u_j\right)\right) \\ &= S\left(\left(\lambda \cdot \sum_{j=1}^n x_{1j} u_j, \sum_{j=1}^n x_{2j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^n x_{nj} u_j\right)\right) \\ &= \lambda S\left(\left(\sum_{j=1}^n x_{1j} u_j, \sum_{j=1}^n x_{2j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^n x_{nj} u_j\right)\right) \end{aligned}$$

$= \lambda \cdot n(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Παρόμοια η (2) αποδεικνύεται, για κάθε δείκτη $i \geq 1$ που το δείξουμε.

Άρα $n \in \mathcal{J}^n(V)$.

Ακόμα έχουμε: για $1 \leq i < j \leq n$

$$\begin{aligned} n((v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n)) &= \\ &= S\left(\left(\sum_{l=1}^n x_{1l} u_l, \dots, \sum_{l=1}^n x_{il} u_l, \dots, \sum_{l=1}^n x_{jl} u_l, \dots, \sum_{l=1}^n x_{nl} u_l\right)\right) \\ &= S\left(\left(\sum_{l=1}^n x_{1l} u_l, \dots, \sum_{l=1}^n x_{jl} u_l, \dots, \sum_{l=1}^n x_{il} u_l, \dots, \sum_{l=1}^n x_{nl} u_l\right)\right) = \end{aligned}$$

$$= -n \left((v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) \right), \text{ αφού } \zeta \in \Omega^n(V) \setminus \{0\}$$

Η (37) ισχύει παρόμοια για οποιοδήποτε γινόμενο διανυσμάτων $(i, j) \in T_n^2$ με $i < j$. Αυτό δείχνει ότι

$$\eta \in \Omega^n(\mathbb{R}^n).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\omega_0: (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } \omega_0 =$$

$$\omega_0 \left((x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}), (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}), \dots, (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}) \right) \\ = \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \det(x_{ij}).$$

Έχουμε δείξει προηγουμένως ότι: $\omega_0 \in \mathcal{T}^n(\mathbb{R}^n)$.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $\omega_0 \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ επίσης από τις ιδιότητες της ορίζουσας.

Απόφα από προωρό θεωρούμε ότι έχουμε ότι:

$$\dim(\Omega^n(\mathbb{R}^n)) = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = 1.$$

(159)

Απόφαση από τον ορισμό της ω είναι προφανές

$$\text{ότι } \omega((e_1, e_2, \dots, e_n)) = \det I_n = 1, \text{ όπου}$$

$e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ είναι τα διάνυσμα της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$ που έχει ακριβώς 0 επιμέρους από την i -θέση που έχει το 1 για $i=1, 2, \dots, n$.

Αφού $\omega \neq 0$ (το μηδενικό στοιχείο του $\Sigma^n(V)$) και $\dim(\Sigma^n(\mathbb{R}^n)) = 1$ έπεται ότι το $\{\omega\}$ είναι βάση του $\Sigma^n(\mathbb{R}^n)$ και άρα υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbb{R}$:

$$\eta = \lambda_0 \cdot \omega. \text{ Άρα}$$

$$\begin{aligned} \eta((e_1, e_2, \dots, e_n)) &= (\lambda_0 \cdot \omega)((e_1, e_2, \dots, e_n)) = \\ &= \lambda_0 \cdot \omega((e_1, e_2, \dots, e_n)) = \lambda_0 \cdot 1 \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της η υποσυνθήκη:

$$\eta((e_1, e_2, \dots, e_n)) =$$

$$= \eta((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)) =$$

$$= \omega((u_1, u_2, \dots, u_n)) / 4.$$

$$\text{Από τη (3) και (4) έπεται ότι: } \lambda_0 = \omega((u_1, u_2, \dots, u_n))$$

Αρα από τον ορισμό της ω έχουμε:

$$\text{για } \omega_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} y_j \text{ για } i=1,2,\dots,n$$

$$\omega((\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)) = \omega\left(\left(\sum_{j=1}^n q_{1j} y_j, \sum_{j=1}^n q_{2j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n q_{nj} y_j\right)\right)$$

$$= \omega\left(\left((q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n}), (q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n}), \dots, (q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{nn})\right)\right)$$

$$= \lambda_0 \cdot \omega_0\left(\left(q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n}, (q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2n}), \dots, (q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{nn})\right)\right)$$

$$= \omega(y_1, y_2, \dots, y_n). \det(q_{ij}) \text{ δηλαδή το } \det(q_{ij}) \text{ είναι } \blacksquare$$

Επίσης θα μας χρειαστεί και το ακόλουθο λήμμα

Λήμμα 1

Έστω V να είναι ένας αθαιρέτος

διανυσματικός χώρος και έστω οι 1-ταυτοζεύς $\omega_i \in \mathcal{T}'(V)$ για $i=1,2,\dots,n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Τότε ισχύει:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n = n! \operatorname{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_n)$$

Απόδειξη (επιτός ύλης)

Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου $\wedge$ μεταβίβω δύο τανυστών $\omega \in \mathcal{T}^k(V)$ και $\eta \in \mathcal{T}^l(V)$ για $k, l \in \mathbb{N}$ με $\omega \wedge \eta \in \mathcal{T}^{k+l}(V)$ ισχύει:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k! l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta) \quad \text{έχουμε για } k=l=1$$

ότι $\omega \wedge \eta = 2! \text{Alt}(\omega \otimes \eta)$ δηλαδή τον

ισχυρισμό του λήμματος για $n=2$.

Υποθέτουμε ότι το λήμμα αληθεύει για κάθε n και $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ και θα δείξουμε ότι αληθεύει και για $k+1$, με μαθηματική επαγωγή.

Έστω λοιπόν οι $(k+1)$ 1-τανυστές $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k+1}$.

Έχουμε:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_{k+1} = (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k) \wedge \omega_{k+1},$$

από την προεταγριστική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου τανυστών. Θέτουμε

$$\omega_k := \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_k. \quad \text{Ο } \omega_k \text{ είναι } k\text{-τανυστής}$$

και $\omega_k \in \mathcal{T}^k(V)$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό

του εσωτερικού γινομένου τανυστών για τον

ω_k και τον ω_{k+1} και παίρνουμε:

(162)

$$\omega_0 \wedge \omega_{n+1} = \frac{(n+1)!}{n! \cdot 1!} \cdot \text{Alt}(\omega_0 \otimes \omega_{n+1}) \quad (2)$$

Από το επαγωγικό βήμα για κ αντιστοιχεί έχουμε τώρα

$$\omega_0 = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n = n! \cdot \text{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_n) \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας από την (3) στην (2) παίρνουμε:

$$\omega_0 \wedge \omega_{n+1} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \text{Alt} \left((n! \cdot \text{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_n)) \otimes \omega_{n+1} \right) \quad (4)$$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα των αντισυμμετρικών

$$(a \cdot S) \otimes T = a \cdot (S \otimes T) \text{ που ισχύει για κάθε}$$

$a \in \mathbb{R}$ και οποιονδήποτε αντισυμμετρικούς S, T για

$$a = n!, \quad S = \text{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_n) \text{ και } T = \omega_{n+1}$$

στην (4) και παίρνουμε:

$$\omega_0 \wedge \omega_{n+1} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \text{Alt} \left(n! \cdot (\text{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_n) \otimes \omega_{n+1}) \right) \quad (5)$$

Ο τελεστής $\text{Alt} : \mathcal{J}^{k+1}(V) \rightarrow \mathcal{J}^{k+1}(V)$ είναι επεξεργαστής.

Οπότε από την (5) παίρνουμε:

$$\omega_0 \wedge \omega_{n+1} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \left(n! \cdot \text{Alt}(\text{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_n) \otimes \omega_{n+1}) \right)$$

$$\stackrel{(*)}{=} (n+1)! \cdot \text{Alt}(\text{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_n) \otimes \omega_{n+1}) \quad (6)$$

163

$$T = \text{Apt} \left((\text{Apt} (w_1 \otimes w_2 \otimes \dots \otimes w_n)) \otimes w_{n+1} \right).$$

$$T = \text{Apt} \left((\text{Apt} (w_1 \otimes w_2 \otimes \dots \otimes w_n)) \otimes w_{n+1} \right).$$

(Noxipos 66 nollantobures), now has 100 70 615:

$$\text{Alt}((\text{Alt}(w \otimes u)) \otimes \theta) = \text{Alt}(w \otimes u \otimes \theta) / 7$$
$$\omega = \omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_n, \quad \omega = \omega_n, \quad \theta = \omega_{n+1}$$
$$\begin{aligned} & \text{Alt}((\text{Alt}((\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_{n-1}) \otimes \omega_n)) \otimes \omega_{n+1}) = \\ & = \text{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_n \otimes \omega_{n+1})/8 \end{aligned}$$

(164)

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ότι το εσωτερικό γινόμενο $\wedge$ είναι προσεταιριστικό είναι, ότι είναι αντισφαιρικό από την εισαγωγή ομοιοσυνδυαστικής παρενθέσεων μεταξύ των όρων του και άρα το εσωτερικό γινόμενο $(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_{n-1}) \otimes \omega_n = \omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_n$ είναι γραμμικό (9).

Παμβάθουνται υπόψη των (9) και (8) να, αντισφαιρικών από των (8) και (6) παίρνουμε:

$$\omega \wedge \omega_{n+1} = (n+1)! \cdot \text{Alt}(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_{n+1}) \quad (10)$$

Τέλος από τις (1) και (10) αξιοποιώντας, η εισαγωγή και φυσικά η απόδειξη αυτού του τύπου.

Απόφα θα μας χρειαστεί ακόμα ένα είδος τύπου

Πήληγ 2

Έστω V να είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένου διαστάσεως ίσως με $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Έστω $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ να είναι μια διατεταγμένη βάση του V και $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ να είναι η δυϊκή βάση της $(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Τότε ισχύει:

$$i) (\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n)((u_1, u_2, \dots, u_n)) = 1 \text{ και}$$

$$ii) (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n)((u_1, u_2, \dots, u_n)) = 1$$

Απόδειξη (εντός ύλης)

Το i) είναι απλώς υπολογισμός και λαμβάνονται υπόψη ότι: $\varphi_i(u_i) = 1$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$

(αφού η $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, n$ ε' ορισμού είναι η δυνάμει βάση της $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ και με αυτή τη σειρά) έπεται ότι:

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n)((u_1, u_2, \dots, u_n)) &= \\ &= \varphi_1(u_1) \cdot \varphi_2(u_2) \cdot \dots \cdot \varphi_n(u_n) = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n \text{-φορές}} = 1. \end{aligned}$$

ii) Από το προηγούμενο ήμην 1 έχουμε:

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n = n! \cdot \text{Alt}(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n) \quad (1).$$

Άρα από την (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n)((u_1, u_2, \dots, u_n)) &= \\ &= (n! \cdot \text{Alt}(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n))((u_1, u_2, \dots, u_n)) \quad (2) \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του αριθμητικού δινομήνου αριθμού στη τριάντα έχουμε:

$$(n! \cdot \text{Alt}(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n))((u_1, u_2, \dots, u_n)) =$$

(166)

(166)

$$= n! \cdot \left(\text{Alt}(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n) \right) ((u_1, u_2, \dots, u_n)) / 3!$$

Από τον ορισμό του εναλλάξιμου τανυστή έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left(\text{Alt}(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n) \right) ((u_1, u_2, \dots, u_n)) = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma \cdot (\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n)((u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)})) \end{aligned} \quad (4)$$

Εξ' ορισμού έχουμε:

$$\begin{aligned} & (\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n)((u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(n)})) \\ &= \varphi_1(u_{\sigma(1)}) \cdot \varphi_2(u_{\sigma(2)}) \cdot \dots \cdot \varphi_n(u_{\sigma(n)}) \quad (5) \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της δυνάμει βέβαια, είναι ότι το γινόμενο στην (5) είναι πάντα 0 εκτός από την περίπτωση όπου $\varphi_i(u_{\sigma(i)}) = 1$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ και αυτό συμβαίνει μόνο αν $\sigma(i) = i$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, δηλαδή αν $\sigma = \text{id}_n$, δηλαδή ο

σ να είναι η ταυτοτική μερική αντιστοιχία όπου $\text{sgn} \sigma = 1$.

Για κάθε άλλη μερική αντιστοιχία εκτός από την ταυτοτική το γινόμενο στην (5) μηδενίζεται. Άρα το γινόμενο στην

(4) ισούται με:

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot (\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n) ((y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \dots, y_{\sigma(n)}))$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot 1 = \frac{1}{n!} (6)$$

Αντιμεθετιζώντας από την (6) στην (4) και μετά από την (4) στην (3) και από την (3) στην (2) παίρνουμε τελικά ότι:

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n) ((y_1, y_2, \dots, y_n)) = 1. \blacksquare$$

Η παραπάνω πρόταση και το λήμμα 2 έχουν μεγάλη δύναμη.

Έτσι ελπίδας του ότι αληθεύουν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίσουμε διαφοριές n -μορφές στον $\mathbb{R}^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Έτσι θα τα χρησιμοποιήσουμε τώρα για τον υπολογισμό διαφοριών n -μορφών στον $\mathbb{R}^n$ για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Πρώτα όφειλε να ορίσουμε τις διαφοριές n -μορφές στον $\mathbb{R}^n$ για $n \geq 2$. Για $n = 2, 3$ το έχουμε ήδη, ήδη αλλά τώρα τις ορίζουμε με ένα γενικό τρόπο.

(168)

Διαφορίνες n -μορφές στον $\mathbb{R}^n$ για $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Έστω $\omega \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p)$ για $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Σταθερούμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Έτσι $\omega(p_0) \in \Omega^n(\mathbb{R}^n_{p_0})$.
Από γνωστό θεώρημα ο διανυσματικός χώρος $\Omega^n(\mathbb{R}^n_{p_0})$

έχει διάσταση $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$.

Έστω $\bar{E}_{p_0} = ((e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0})$ να είναι
η βάση του $\mathbb{R}^n_{p_0}$ και

$\bar{E}_{p_0}^* = ((e_1^*)_{p_0}, (e_2^*)_{p_0}, \dots, (e_n^*)_{p_0})$ να

είναι η δυική βάση της $\bar{E}_{p_0}$.

Τώρα το σύνολο:

$$(T^n)^* := \{ (i_1, i_2, \dots, i_n) \in T^n \mid i_1 < i_2 < \dots < i_n \} = \{ (i_1, i_2, \dots, i_n) \}$$

Από το σύνολο $\{ (e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0} \wedge \dots \wedge (e_n^*)_{p_0} \}$

αποτελεί βάση του $\Omega^n(\mathbb{R}^n_{p_0})$ από το γνωστό
θεώρημα.

Άρα, ο φού $\omega(p_0) \in \Omega^n(\mathbb{P}^n_{p_0})$, υπάρχει $\omega_1(p_0) \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\omega(p_0) = \omega_1(p_0) \cdot ((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0} \wedge \dots \wedge (e_n^*)_{p_0})$$

Από το γεγονός έχουμε ότι για κάθε $p \in \mathbb{P}^n$ υπάρχει $\omega_1(p) \in \mathbb{R}$ μοναδικός ώστε να ισχύει:

$$\omega(p) = \omega_1(p) \cdot ((e_1^*)_p \wedge (e_2^*)_p \wedge \dots \wedge (e_n^*)_p) / *$$

Έτσι, από την ω ορίζεται, με μοναδικό τρόπο μια συνάρτηση $\omega_1: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει:
 η (*) παραμένει για κάθε $p \in \mathbb{P}^n$.

Αλλά και αντίστροφα. Αν πάρουμε οποιαδήποτε συνάρτηση $\omega_1: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (όχι απαραίτητα με κάποια ιδιαίτερα ιδιότητα, π.χ. συνεχή ή διαφορίσιμη) τότε ορίζεται μοναδικά η διαφορήσιμη n -μορφή στον $\mathbb{P}^n$ $\omega \in \bigcup_{p \in \mathbb{P}^n} \Omega^n(\mathbb{P}^n_p)$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\omega(p) = \omega_1(p) \cdot ((e_1^*)_p \wedge (e_2^*)_p \wedge \dots \wedge (e_n^*)_p)$$

για κάθε $p \in \mathbb{P}^n$.

Έστω λοιπόν $\omega \in \prod_{p \in \mathcal{P}} \Omega^n(\mathbb{P}_p^n)$.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την ω_0 .

Μια βωάρηση είναι πλήρως γνωστή εαν μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή της σε οποιοδήποτε βρωμάριο του πεδίου ορισμού της. Ας δούμε πως μπορούμε να το κάνουμε αυτό για την ω_0 .

Από την προηγούμενη βωή που ορίζεται για την ω_0 μια βωάρηση $\omega_1: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}$ με μοναδικό πρόσημο ώστε να ισχύει:

$$\omega_0(p) = \omega_1(p) \cdot \left((e_1^*)_p \wedge (e_2^*)_p \wedge \dots \wedge (e_n^*)_p \right)^{(*)}$$

για κάθε $p \in \mathbb{P}^n$. Έτσι η ω_1 είναι πλήρως γνωστή.

Ας σταθεροποιήσουμε ένα $p_0 \in \mathbb{P}^n$.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τον n -τάανυσμα στον $\mathbb{P}^n$

$\omega_0(p_0)$. Προφανώς $\omega_0(p_0) \in \Omega^n(\mathbb{P}_{p_0}^n)$ και

$$\text{άρα } \omega_0(p_0): (\mathbb{P}_{p_0}^n)^n \rightarrow \mathbb{P}.$$

(171)

Α, πάρουμε τυχόν $x_0 \in (\mathbb{P}_{p_0}^n)^n$

Ας προσδιορίσουμε την τιμή $(\omega_0(p_0))(x_0)$.

Προφανώς αφού $x_0 \in (\mathbb{P}_{p_0}^n)^n$, υπάρχουν

μοναδικά ορισμένα $w_i \in \mathbb{P}_{p_0}^n$ για $i=1,2,\dots,n$ ώστε

να ισχύει: $x_0 = (w_1, w_2, \dots, w_n)$.

Σε γνωστό n -όδη $E = ((e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0})$

είναι βάση του $\mathbb{P}_{p_0}^n$.

Αφού $w_i \in \mathbb{P}_{p_0}^n$ για $i=1,2,\dots,n$, έλεγχω ότι

υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί a_{ij} για $i,j \in T_n$ ώστε να

ισχύει: $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_j)_{p_0}$ για κάθε $i=1,2,\dots,n$

αφού E είναι βάση του $(\mathbb{P}_{p_0}^n)$ και οι

αριθμοί a_{ij} , $i,j \in T_n$ είναι μοναδικά ορισμένοι, ώστε

να ισχύει: $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_j)_{p_0}$ για κάθε $i=1,2,\dots,n$.

Εφαρμόζουμε την παραπάνω πρόταση και παίρνουμε
ότι:

$$\omega_0(p_0)(x_0) = \omega_0(p_0)((w_1, w_2, \dots, w_n))$$

$$\begin{aligned}
 \omega_0(p_0)(x_0) &= (\omega_0(p_0))((w_1, w_2, \dots, w_n)) = \\
 &= \det(a_{ij}) \cdot (\omega_0(p_0))((e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0}) = \\
 &= (\omega_1(p_0) \cdot ((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0} \wedge \dots \wedge (e_n^*)_{p_0})) \\
 &\quad ((e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0}) \cdot \det(a_{ij}) = \\
 &= (\omega_1(p_0)) \cdot (((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0} \wedge \dots \wedge (e_n^*)_{p_0})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\quad ((e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0})) \cdot \det(a_{ij}) = \\
 &= \omega_1(p_0) \cdot \det(a_{ij}) \quad , \text{ αφού}
 \end{aligned}$$

$$((e_1^*)_{p_0} \wedge (e_2^*)_{p_0} \wedge \dots \wedge (e_n^*)_{p_0})((e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0}) = 1$$

= 1 από το λήμμα 2.

Άρα έχουμε ότι: $\omega(p)(x_0) = \omega_1(p) \cdot \det(a_{ij})$

για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $x_0 \in (\mathbb{R}^n)_p$.

Επί προδρισίσαμε ένα γενικό τρόπο για να
βρίσκουμε τις διαφορίες n -μορφές στο $\mathbb{R}^n$ για
κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Ας συγκεντρώσουμε τη προηγούμενη.

Είδαμε τον ορισμό των διαφοριών u -μορφών στον $\mathbb{R}^n$ για όλα τα $u \in \mathbb{N}$, με $1 \leq u \leq 3$, των περιπτώσεων 0-μορφών στον $\mathbb{R}^n$ δεν καί για των περιπτώσεων διαφοριών u -μορφών στον $\mathbb{R}^n$ για κάθε $u \in \mathbb{N}$, $u \geq 2$.

Υπολογιστικά μόνο οι παραπάνω διαφορίες μορφές θα μας αναγκάσουν στο μέλλον μας, και περιγράψαμε ήδη αναλυτικά τον τρόπο υπολογισμού των διαφοριών μορφών όλων αυτών των περιπτώσεων.

Για την πληρότητα της παρουσίασης θα παρουσιάσουμε και τον ορισμό των διαφοριών u -μορφών στον $\mathbb{R}^n$ για $u \in \mathbb{N}$ με $u \geq 2$ και $u < n$, αλλά δεν θα υποβληθούμε στον υπολογισμό τους εξαιτίας της πολυπλοκότητάς τους.

Συμπεραίνουμε μόνο ότι έχουμε ήδη δει πως παρόμοια τέτοια μορφές διαφοριών μορφών τις διαφορίες 2-μορφές στον $\mathbb{R}^3$ και είδαμε με τον ορισμό πως τις υπολογίζουμε.

(174)

Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $2 \leq k < n$, $n \geq 4$
 Διαφορίνες k -μορφές στον $\mathbb{R}^n$

Έστω $\omega \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^k(\mathbb{R}^n_p)$.

Σταθεροποιούμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Έτσι
 $\omega(p_0) \in \Omega^k(\mathbb{R}^n_{p_0})$.

Από γνωστό θεώρημα ο διανυσματικός χώρος
 $\Omega^k(\mathbb{R}^n_{p_0})$ έχει διάσταση $\binom{n}{k}$.

Μια βάση του $\Omega^k(\mathbb{R}^n_{p_0})$ είναι το σύνολο όλων
 των k -τάυσεων της μορφής:

$\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$, για όλα τα
 $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in T_n^k$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, όπου
 $\varphi_i = (e_i^*)_{p_0}$ για $i = 1, 2, \dots, n$, δηλαδή

n διατεταγμένα βάσεις $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ είναι η
 συνηθισμένη βάση των βάσεων $((e_1)_{p_0}, (e_2)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0})$
 του $\mathbb{R}^n_{p_0}$.

(175)

Αφού $\omega(p_0) \in \Omega^k(\mathbb{R}^n_{p_0})$ έπεται ότι
για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n^k)^*$ υπάρχει
ενας αντίστοιχος πραγματικός αριθμός που αν τον
συμβολίσουμε με $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}(p_0) \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\omega(p_0) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n^k)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}(p_0) \cdot (e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)(p_0),$$

όπου το παραπάνω άθροισμα σημαίνει ότι
προσθέτουμε όλους τους όρους της μορφής:

$$\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}(p_0) \cdot (e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)(p_0)$$

για όλες τις k -άδες $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n^k)^*$,

παιρνώντας στο παραπάνω άθροισμα αριθμούς μία φορά
κάθε έναν από αυτούς τους όρους οι οποίοι στο
πλήθος είναι $\binom{n}{k}$.

Έτσι παρόμοια για κάθε $p \in \mathbb{P}^n$ ορίζονται,
 μοναδικά $\binom{n}{k}$ πραγματικοί αριθμοί οι

$\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}(p) \in \mathbb{P}$ για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n^k)^*$
 έτσι ώστε να ισχύει:

$$\omega(p) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n^k)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}(p) \cdot \left((e_{i_1}^*)_p \wedge (e_{i_2}^*)_p \wedge \dots \wedge (e_{i_k}^*)_p \right)$$

για κάθε $p \in \mathbb{P}^n / (*)$.

Έτσι από την $(*)$ ορίζονται οι $\binom{n}{k}$ στο $\mathbb{P}$
 πραγματικοί συναρτήσεις $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}$
 για όλα τα $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n^k)^*$, για τις οποίες
 ισχύει η $(*)$ παραπάνω.

Αντίστροφα :

Επιλέγουμε αυθαίρετα $\binom{n}{k}$ πραγματικούς
 συναρτήσεις, τις $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}$ για όλα
 τα $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n^k)^*$ και τις σταθεροποιούμε.

(177)

Συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές δεν έχουν καμία ανεξάρτητη ιδιότητα. Ας πούμε δεν είναι γραμμική συνάρτηση ή διαφορίσιμες.

Για κάθε σταθερό $p \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τον n -τάσος

$$\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^k)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}(p) \cdot \left((e_{i_1}^*)_p \wedge (e_{i_2}^*)_p \wedge \dots \wedge (e_{i_n}^*)_p \right)$$

που ανήκει στο $\Omega^k(\mathbb{R}^n_p)$, αφού ο

$$\Omega^k(\mathbb{R}^n_p) \text{ είναι διανυσματικός χώρος και τα } (e_{i_1}^*)_p \wedge (e_{i_2}^*)_p \wedge \dots \wedge (e_{i_n}^*)_p \in \Omega^k(\mathbb{R}^n_p)$$

για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^k)^*$.

Για απλότητα συμβολίζουμε τον παραπάνω τάσος με $\omega(p)$ για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή συμβολίζουμε με

$$\omega(p) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^k)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}(p) \cdot \left((e_{i_1}^*)_p \wedge (e_{i_2}^*)_p \wedge \dots \wedge (e_{i_n}^*)_p \right)$$

για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

(178)

(179)

(180)

Έτσι $\omega(r) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $r \in \mathbb{R}^n$.

Συμβολίζουμε $\mu \in A_r := \{ \omega(r) \}$ για κάθε $r \in \mathbb{R}^n$

για απλότητα.

Έτσι για κάθε $r \in \mathbb{R}^n$ είναι πλήρως καθορισμένο το μονοσύνολο A_r .

Από το αξίωμα-ελάχιστης-αντιμετάθεσης ορίζεται

ηολό το σύνολο $\{ A_r \mid r \in \mathbb{R}^n \} = \mathcal{B}$, με

στοιχεία αριθμών όλα τα σύνολα A_r για $r \in \mathbb{R}^n$.

Από το αξίωμα της έλλειψης ορίζεται η έλλειψη

$\cup \mathcal{B} = \cup_{r \in \mathbb{R}^n} A_r$ είναι ένα ηολό ορισμένο σύνολο.

Αφού $A_r \neq \emptyset$, για κάθε $r \in \mathbb{R}^n$ αφού το A_r

είναι έλ' ορισμού μονοσύνολο (ηολό, άρα ηολό ή έλ') ,

έπεται από το αξίωμα της ενδοχής ότι ισχύει:

$$\prod_{r \in \mathbb{R}^n} A_r \neq \emptyset.$$

$$r \in \mathbb{R}^n$$

(179)

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι το δάνοτο

$\prod_{p \in \mathbb{P}^n} A_p$ είναι μονοδάνοτο. Θέτουμε

$\eta \in \prod_{p \in \mathbb{P}^n} A_p$ να είναι το μοναδικό στοιχείο

του $\prod_{p \in \mathbb{P}^n} A_p$. Είναι προφανές από τον ορισμό

του η ότι $\eta \in \prod_{p \in \mathbb{P}^n} \Omega^4(\mathbb{P}^n_p)$ και ότι:

$\eta(p) = \omega(p)$, για κάθε $p \in \mathbb{P}^n$ από τον ορισμό

του η .

Είναι λοιπόν υπάρχει απεικόνιση για n -διαφορετικές
μορφές στον $\mathbb{P}^n$ στην οποία ορίζεται με βάση
τις γνωστές $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}$, για $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*$
που πήραμε αρχικά για την οποία ισχύει ότι:

$$\eta(p) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}(p) \cdot \left((e_{i_1}^*)_p \wedge (e_{i_2}^*)_p \wedge \dots \wedge (e_{i_n}^*)_p \right)$$

για κάθε $p \in \mathbb{P}^n$.